

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики



С целью защиты авторских прав
НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Е.В. Хорошилова

**КУРС СЕМИНАРОВ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

Самоучитель

Книга 3

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ:
ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ.
ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие
для очной, дистанционной и смешанной форм обучения
студентов университетов

Москва—2023

УДК 378.4:517.1:517.2:517.5
ББК 22.16
X82

Рецензенты:

проф. А.В. Гасников (МФТИ, Долгопрудный), проф. Л.Ф. Петров (РЭА им. Г.В. Плеханова, Москва), проф. А.Д. Мижидон (Восточно-Сибирский ГУТиУ, Улан-Удэ)

Хорошилова Е.В.

X 82 Курс семинаров по математическому анализу: Самоучитель. – В 4-х кн. – Кн. 3: Функции одной действительной переменной: Исследование и построение графиков. Определённый интеграл и его приложения. – Учеб. пособие для очной, дистанционной и смешанной форм обучения студентов университетов. – М.: Издательство МГУ, 2022. – 468 с.

Третья книга нового пособия–задачника из 4-х книг (всего более 3600 задач с решениями) включает 880 задач и посвящена отработке навыков основных видов исследований по теме «Функции одной действительной переменной: Исследование и построение графиков. Определённый интеграл и его приложения».

В пособии приводятся необходимые теоретические сведения, основной акцент делается на систематизации приёмов и методов решения задач. Изложение методов сопровождается разбором примеров и задачами разных типов для самостоятельного решения.

Для студентов младших курсов университетов, обучающихся математическим и инженерно–технологическим специальностям, и молодых преподавателей.

УДК 378.4:517.1:517.2:517.5
ББК 22.16
© Хорошилова Е.В., 2022

Содержание

Предисловие	8
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)	12
1 СЕМИНАР: Исследование функций на монотонность. Полярная система координат	13
1.1 Монотонность явно заданной функции в декартовой системе координат	13
1.2 Свойства монотонных функций. Монотонность в точке	17
1.3 Достаточные условия строгой монотонности в точке и на промежутке	21
1.4 Применение следствия из теоремы Лагранжа для доказательства тождеств	22
1.5 Доказательство тождественных неравенств между функциями путем сравнения их производных	23
1.6 Монотонность параметрически и неявно заданных плоских кривых	24
1.7 Монотонность в полярной системе координат	26
1.8 Задачи для самостоятельного решения	36
1.9 Ответы и решения	41
2 СЕМИНАР: Исследование функции на выпуклость и точки перегиба	54
2.1 Определения выпуклой функции и их геометрический смысл. Неравенства Йенсена	54
2.2 Свойства выпуклых функций	59
2.3 Достаточные условия выпуклости функций, имеющих вторую производную. Критерий строгой выпуклости	61
2.4 Точка перегиба и достаточные условия её существования	62
2.5 Доказательство известных неравенств с помощью неравенства Йенсена. Интегральный аналог неравенства Йенсена	66
2.6 Задачи для самостоятельного решения	71
2.7 Ответы и решения	74
3 СЕМИНАР: Исследование функции на ограниченность, точные грани. Локальные экстремумы	81
3.1 Ограниченность в декартовых и полярных координатах. Точные грани функции и их достижимость	81
3.2 Локальные и краевые экстремумы	84
3.3 Необходимое и достаточные условия локального экстремума . .	86

3.4	Нахождение локальных экстремумов у кривых, заданных параметрически или неявно	89
3.5	Нахождение локальных экстремумов в полярной системе координат	92
3.6	Задачи для самостоятельного решения	93
3.7	Ответы и решения	99
4	СЕМИНАР*: Нахождение асимптот, осей и центров симметрии графиков. Периодичность. Особые точки кривых.	115
4.1	Асимптоты в декартовых и полярных координатах	116
4.1.1	Асимптоты в декартовых координатах	116
4.1.2	Асимптоты в полярных координатах	120
4.1.3	Криволинейные асимптоты	123
4.2	Нахождение осей и центров симметрии графиков	123
4.2.1	Симметрия кривых в декартовых координатах	124
4.2.2	Симметрия кривых в полярных координатах	128
4.3	Периодичность функций	130
4.3.1	Периодичность функций в декартовых координатах	131
4.3.2	Периодичность функций в полярных координатах	135
4.4	Особые точки плоских кривых*	136
4.5	Задачи для самостоятельного решения	139
4.6	Ответы и решения	144
5	СЕМИНАР: Построение кривых в декартовых координатах	159
5.1	Случай явного задания функции	159
5.2	Параметрический способ задания кривой	163
5.3	Неявный способ задания кривой	166
5.4	Задачи для самостоятельного решения	169
5.5	Ответы и решения	171
6	СЕМИНАР: Построение кривых в полярных координатах	190
6.1	Построение кривых с помощью преобразований параллельного переноса, растяжения и сжатия, поворота, а также центральной и осевой симметрий	190
6.2	Построение кривых с помощью общей схемы исследования – с использованием производных	194
6.3	Задачи для самостоятельного решения	196
6.4	Ответы и решения	198
	ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ	208

7 СЕМИНАР: Определённый интеграл Римана как предел интегральных сумм	208
7.1 Определение интеграла Римана (собственного интеграла). Геометрический смысл	209
7.2 Нижняя и верхняя суммы Дарбу. Интегралы Дарбу. Необходимое и достаточное условие интегрируемости	211
7.3 Необходимое условие интегрируемости. Классы и свойства интегрируемых функций. Критерий Лебега интегрируемости	212
7.4 Интегралы с переменными пределами. Интегрируемость по Риману и существование первообразной	216
7.5 Задачи для самостоятельного решения	220
7.6 Ответы и решения	224
8 СЕМИНАР: Вычисление определённых интегралов	232
8.1 Вычисление интеграла как предела интегральной суммы	232
8.2 Сведение к табличным интегралам	232
8.3 Формула Ньютона–Лейбница. Дифференцирование интегралов с переменными пределами	233
8.4 Замена переменной	236
8.5 Интегрирование по частям	239
8.6 Вычисление предела последовательности как предела интегральной суммы. Приближённое вычисление интегралов	240
8.7 Задачи для самостоятельного решения	242
8.8 Ответы и решения	249
9 СЕМИНАР: Оценки интегралов. Теоремы о среднем	269
9.1 Свойства определённого интеграла, связанные с неравенствами. Известные интегральные неравенства	269
9.2 Оценивание интеграла через нахождение точных граней (оценок) подынтегральной функции. Среднее значение интегрируемой функции	272
9.3 Доказательство неравенств интегрированием	273
9.4 Теоремы о среднем значении	274
9.5 Задачи для самостоятельного решения	276
9.6 Ответы и решения	281
10 СЕМИНАР: Несобственный интеграл. Сходимость. Формула Ньютона–Лейбница. Признаки сходимости	291
10.1 Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода: особые точки, сходимость, свойства	291
10.2 Вычисление несобственных интегралов	298

10.2.1	Формулы Ньютона–Лейбница	298
10.2.2	Формула замены переменной	299
10.2.3	Интегрирование по частям	300
10.3	Теорема сравнения. Признаки сравнения	302
10.3.1	Сходимость интегралов от неотрицательных функций . .	302
10.3.2	Теорема сравнения	302
10.3.3	1-й признак сравнения, или признак абсолютной сходимости	304
10.3.4	2-й признак сравнения	304
10.3.5	3-й признак сравнения, или сравнение со степенью	306
10.4	Задачи для самостоятельного решения	308
10.5	Ответы и решения	313
11	СЕМИНАР: Исследование сходимости несобственных интегралов (продолжение): критерий Коши, признаки Дирихле и Абеля, формула Тейлора и др. приёмы	333
11.1	Известные несобственные интегралы	333
11.2	Критерий Коши сходимости несобственных интегралов	335
11.3	Признак Дирихле	336
11.4	Признак Абеля	341
11.5	Использование формулы Тейлора при исследовании сходимости интегралов	342
11.6	Сходимость интеграла в смысле главного значения	343
11.7	Задачи для самостоятельного решения	347
11.8	Ответы и решения	351
12	СЕМИНАР: Абсолютная (условная) сходимость несобственного интеграла	364
12.1	Понятие абсолютной (условной) сходимости интеграла. Некоторые теоремы	364
12.2	Задачи для самостоятельного решения	368
12.3	Ответы и решения	370
13	СЕМИНАР: Вычисление площади плоской фигуры	385
13.1	Квадрируемость. Понятие площади	385
13.2	Площадь в прямоугольных координатах	388
13.3	Площадь в полярных координатах	393
13.4	Задачи для самостоятельного решения	398
13.5	Ответы и решения	403
14	СЕМИНАР: Вычисление длины дуги кривой	420
14.1	Спрямолинейная кривая и её длина. Особые точки	424

14.2	Достаточные условия спрямляемости и вычисление длины дуги кривой в прямоугольных координатах	428
14.3	Вычисление длины дуги кривой в полярных координатах	432
14.4	Задачи для самостоятельного решения	434
14.5	Ответы и решения	437
15	СЕМИНАР: Объём и площадь поверхности тел вращения. Вычисление объёмов по известным поперечным сечениям	445
15.1	Кубируемость (измеримость множеств в $\mathbb{R}^3$). Объём пространственного тела	445
15.2	Достаточные условия кубируемости и вычисление объёмов тел вращения	447
15.3	Вычисление объёмов тел с известными площадями поперечных сечений	451
15.4	Вычисление площадей поверхностей тел вращения и некоторые другие приложения определённого интеграла	453
15.5	Задачи для самостоятельного решения	461
15.6	Ответы и решения	465
16	Варианты заданий для самопроверки, подготовки к контрольным работам	480
16.1	ВАРИАНТ № 1	481
16.2	ВАРИАНТ № 2	482
16.3	ВАРИАНТ № 3	483
16.4	ВАРИАНТ № 4	484
16.5	ВАРИАНТ № 5	485
16.6	ВАРИАНТ № 6	486
	Предметный указатель	462
	Список литературы	465

Предисловие

«Ситом черпает воду тот, кто хочет учиться без книги».

Старинное изречение, перевод с латыни.

Данное учебное пособие является третьей из 4-х книг, представляющих углублённый курс практических занятий по математическому анализу. Книга адресована, в первую очередь, студентам-математикам, изучающим основы этой дисциплины.

В основу пособия положен курс семинарских занятий для первокурсников, проводимых автором в течение многих лет на факультете ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. Курс охватывает первый год обучения. Данное пособие – это, в основном, задачник для регулярной работы студентов на семинарских занятиях и дома в течение первого курса. Коллекция задач собиралась длительное время и включает в себя как задачи из классических задачников, так и задачи, появившиеся в последние годы (см. список литературы), а также авторские задачи. В начале каждой темы (семинара) приводятся краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач, доказательства которых обычно даётся на лекциях и поэтому в пособие не включены. Цель пособия – ознакомление студентов с разнообразием задач математического анализа и различными приёмами и методами решения этих задач. Важно дать студентам необходимую базу для изучения анализа на практике, научить их самостоятельности в решении задач. По этой причине в конце каждого семинара автор счёл необходимым привести один или даже несколько способов решения всех задач.

Для чего даны решения? Если студент пришёл в университет с недостаточной базой математических знаний, то на младших курсах он неизбежно сталкивается с трудностью в нахождении методов решения многих задач, поскольку у него мало опыта, который вырабатывается ещё в средней школе. Таким студентам на начальном этапе крайне полезно изучать способы решения, и разобранные решения задач являются активным подспорьем этому. Более продвинутые студенты (например, окончившие физико-математические школы и имеющие дополнительные знания и навыки со школьных времён), конечно, должны пытаться решать задачи самостоятельно, но иметь при этом возможность сверить ответ или посмотреть, какие другие способы имеются для решения той или иной задачи. Таким образом, задачники с решениями полезны и для этой категории студентов. Каждый студент, как бы он ни учился, всегда сможет извлечь для себя максимальную пользу, имея под рукой возможность узнать дополнительно другие (отличные от собственного) способы решения и, тем самым, контролировать и регулярно повышать уровень своих знаний. *Как показывает практика, наличие решений никак не мешает студентам, а*

наоборот, помогает и развивает их. Никогда ещё источник дополнительных знаний не был помехой развитию человека. А неусердному студенту и данная книга, сколько бы решений в ней ни приводилось, помочь не сможет.

В первом разделе книги 3 подробно рассматриваются такие понятия как монотонность функций одной действительной переменной, их выпуклость, локальный (глобальный, краевой) экстремум, периодичность, симметрия, асимптоты и др. Изучение отдельных свойств функций завершается общей схемой исследования функций и построением графиков (в декартовой и полярной системах координат), наглядно отражающих эти свойства. Второй раздел посвящён понятию определённого интеграла (собственного и несобственного) и его наиболее известным приложениям на практике.

Для успешного усвоения материала всегда рекомендуется предварительно прослушивать лекции по изучаемой теме. Каждый семинар начинается с основных определений, свойств и теорем курса. Акцент делается на разборе *основных приёмов и методов решения* задач и примерах их использования. В конце семинаров приводятся подборки задач по темам для самостоятельного решения. Следует чётко осознавать, что только решение достаточного количества разнообразных задач позволяет студенту практически усвоить учебный материал, добиваясь необходимой степени понимания и творческого подхода к решению стоящих перед ним задач.

В издании приводятся более 830 задач и примеров с подробными решениями, что позволяет использовать его не только в качестве задачника в течение семестра, но и как *справочное пособие* при самостоятельном изучении данного раздела математики, а также при подготовке к контрольным и зачётным работам и экзамену. Особенно возрастает роль такого рода *самоучителей* при дистанционном и смешанном обучении.

Вместе с тем, всегда найдутся любознательные студенты, которым разобранных в книге задач будет недостаточно. В этом случае рекомендую обращаться к проверенным временем классическим учебникам по курсу математического анализа (например, трудам Г. М. Фихтенгольца,¹ Л. Б. Кудрявцева²

¹Григорий Михайлович *Фихтенгольц* (1888–1959) — русский и советский математик, с 1918 — профессор Петроградского (затем Ленинградского) университета, в котором проработал более сорока лет. Почти все ленинградские математики были в определённой степени его учениками. В разное время его лекции слушали С. Л. Соболев, Л. В. Канторович, И. П. Натансон, С. А. Христианович, С. Г. Михлин, Д. К. Фаддеев, и многие другие видные советские математики. Наиболее известен как автор трёхтомника «Курс дифференциального и интегрального исчисления».

²Лев Дмитриевич *Кудрявцев* (1923–2012) — математик, член-корреспондент АН СССР. Специалист в области теорий функций, уравнений с частными производными и топологии.

и С. М. Никольского,¹ В. А. Ильина,² Э. Г. Позняка,³ В. А. Садовниченко,⁴ Бл. Х. Сендова,⁵ В. А. Зорича⁶), задачникам Б. П. Демидовича,⁷ Г. Н. Бермана⁸, Виноградовой И.А., Олехника С.Н., Садовниченко В.А. [5] и многим другим отечественным и зарубежным учебникам и задачникам, разработанным преподавателями вузов для студентов, а также проверенным интернет-источникам, научным трудам известных математиков по данной теме.

В то время как на лекциях учащийся впервые знакомится с новым материалом, на семинарах он погружается в практику решения задач, что помогает в необходимой степени освоить (понять, запомнить, научиться использовать) свой теоретический багаж. Как известно, решение задач стимулирует нас к

¹Сергей Михайлович *Никольский* (1905–2012) — советский и российский математик, академик РАН (1991); академик АН СССР (1972). Был главным научным сотрудником МИАНа, профессором МФТИ и мехмата МГУ. В 2005 году в Москве состоялась конференция, посвящённая 100-летию С. М. Никольского, в которой он принял участие.

²Владимир Александрович *Ильин* (1928–2014) — советский и российский математик, профессор МГУ, академик РАН. Внёс заметный вклад в теорию дифференциальных уравнений, спектральную теорию дифференциальных операторов и математическое моделирование. Ученик А. Н. Тихонова. Работал на кафедре общей математики факультета ВМК МГУ: профессор (1970–1974), заведующий (1974–2014). Автор более 300 научных работ и соавтор учебников по математическому анализу, аналитической геометрии и линейной алгебре.

³Эдуард Генрихович *Позняк* (1923–1993) — математик, профессор кафедры математики физического факультета МГУ, заслуженный деятель науки РСФСР. В 1980 году совместно с В. А. Ильиным стал лауреатом Государственной премии СССР за учебники «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра» и «Основы математического анализа».

⁴Виктор Антонович *Садовнический* (1939) — советский и российский математик. Ректор МГУ им. М. В. Ломоносова (1992). Президент Российского Союза ректоров (1994), председатель Российского совета олимпиад школьников. Академик РАН (1997), вице-президент РАН (2008–2013). Лауреат Государственной премии СССР (1989), Государственной премии Российской Федерации (2002) и трёх премий Правительства Российской Федерации (2006, 2011, 2012). Почётный гражданин Москвы (2008). Полный кавалер ордена «За заслуги перед Отечеством».

⁵Благовест Христов *Сендов* (1932–2020) — болгарский математик и политический деятель. Работы по теории приближений, вычислительной геометрии. Автор более двухсот научных работ, 7 монографий и 30 учебников, в том числе соавтор учебника В. А. Ильин, В. А. Садовнический, Бл. Х. Сендов «Математический анализ». С 1981 — академик, с 1988 по 1991 был председателем Болгарской академии наук.

⁶Владимир Антонович *Зорич* (род. 1937) — советский и российский математик, доктор физико-математических наук (1969), профессор (1971). Заслуженный профессор МГУ (2007). Автор широко известного учебника «Математический анализ»

⁷Борис Павлович *Демидович* (1906–1977) — советский математик и педагог, специалист в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа, математической физики (ученик А. Н. Колмогорова). Автор одного из наиболее известных в математической среде бывшего СССР сборников задач по математическому анализу.

⁸Георгий Николаевич *Берман* (1908–1949) — советский математик, автор учебников, учебных пособий и научно-популярных книг, которые в период с 1938 по 2015 год изданы общим тиражом свыше 6 миллионов экземпляров.

рассуждениям, анализу, заставляет думать, проникать в суть явления, изучать сначала стандартные методы, а потом – по мере развития – уходить от стереотипов и формировать свой взгляд на изучаемую область. Это непростой и длительный процесс, требующий сосредоточенности и терпения, работоспособности. Но момент, когда, наконец, удаётся пробиться через пелену непонимания, приносит нам радость и уверенность в своих силах в будущем.

Для самопроверки ваших знаний в конце пособия приведены несколько вариантов заданий.

Автор выражает искреннюю признательность всем составителям задач, использованных при разработке этого учебного пособия, чьи идеи способствовали его появлению.

P.S. С удовольствием представляю вниманию читателей тщательно отобранные афоризмы и высказывания различных людей о математике и образовании. Они «вкраплены» по всей книге и, надеюсь, будут стимулировать не только умение быстро переключать внимание и вновь возвращаться к основным, зачастую совсем непростым, математическим рассуждениям, но и вовлекать в философские и исторические размышления. Эти изречения (цитаты) известных людей помогут вам настроиться на соответствующий творческий лад.

Желаю успеха в изучении данных разделов!

Помните, что *это* — *ваше образование*.

Е.В. Хорошилова, сентябрь 2022 г.

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

«Если ученик в школе не научился сам ничего творить, то и в жизни он всегда будет только подражать, копировать, так как мало таких, которые бы, научившись копировать, умели сделать самостоятельное приложение этих сведений».

Л.Н. Толстой (1828–1910) – один из наиболее известных русских писателей и мыслителей, один из величайших писателей–романистов мира. Участник обороны Севастополя (1854–1855) в Крымской войне (между Российской империей и коалицией в составе Британской, Французской, Османской империй и Сардинского королевства).

Ранее было введено понятие однозначной действительнзначной (скалярной) функции одной действительной переменной

$$f : X \rightarrow Y,$$

преобразующей заданное множество X (область определения) в некоторое числовое множество $Y \subseteq \mathbb{R}$ (множество значений). Был определён предел функции в точке и базирующиеся на нём определения непрерывности и дифференцируемости функции в точке и на множестве. Наличие у функции производной существенно облегчает исследование свойств функции. А наличие у функции второй и более старших производных позволяет ещё более уточнить её поведение.

Продолжим изучение свойств однозначных функций одной переменной, а также их обобщений – плоских кривых (в которых одному значению x может отвечать более одного значения y), привлекая при необходимости производные. Ближайшая цель — научиться исследовать функции, заданные различными способами, выявляя их существенные характеристики, и строить графики в декартовой и полярной системах координат.

Пусть имеется функция одной переменной, заданная уравнением $y = f(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}$. Как построить график этой функции? Сразу исключим «примитивный» метод построения кривых «по точкам», оставив его как вспомогательный, и рассмотрим общие подходы. Далее мы увидим, какие богатые возможности существуют для этого, и проверим их на практике. Построение графика – это зачастую серьёзная задача, которая требует предварительного исследования основных свойств неизвестной функции, заданной уравнением или системой уравнений.

Начнём со свойства монотонности.

1 СЕМИНАР: Исследование функций на монотонность. Полярная система координат

«У каждой ошибки есть имя и фамилия».¹

Иосиф Виссарионович Сталин (1878–1953) – российский революционер, советский военный и партийный деятель. Верховный Главнокомандующий Вооруженными Силами СССР с 8.08.1941 г. по 4.09.1945 г.

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Одной из важных характеристик функций одной переменной является их монотонность относительно этой переменной на всей области определения или на отдельных её участках.² Приведём соответствующие определения.

1.1 Монотонность явно заданной функции в декартовой системе координат

Монотонность на промежутке. Начнём с наиболее простого и важного случая, когда функция одной переменной задана на плоскости Oxy явным образом при помощи уравнения $y = f(x)$ на некотором множестве действительных чисел, и уже затем обратимся к случаям неявного и параметрического задания, причём не только в декартовой, но и в полярной системах координат.

Опр. 1. Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$. Тогда $f(x)$ называется *возрастающей* (соответственно, *убывающей*)³ на этом сегменте, если $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

Иными словами, функция возрастает на $[a, b]$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Соответственно, функция убывает на сегменте, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Аналогично определяются возрастающие и убывающие функции на произвольном промежутке (интервале, полуинтервале, открытой и замкнутой полу-

¹Эту фразу также приписывают ближайшему соратнику Сталина – Лаврентию Берии, а также Серго Орджоникидзе и наркомку Ежову. Есть мнение, что первым её сказал нарком путей сообщения Лазарь Каганович, и звучала она так: «У каждой аварии есть имя, фамилия и должность».

²Функции многих переменных этим свойством, вообще говоря, не обладают.

³Иногда говорят «строго возрастающая» и «строго убывающая».

прямых) и, в общем случае, на произвольном множестве $X \subseteq \mathbb{R}$.⁴

Пример 1. Функция арккотангенс $f(x) = \operatorname{arccotg} x$, $x \in \mathbb{R}$, является убывающей на множестве действительных чисел, так как $\operatorname{arccotg} x_1 > \operatorname{arccotg} x_2$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $x_1 < x_2$. В самом деле, обе части неравенства $\operatorname{arccotg} x_1 > \operatorname{arccotg} x_2$ принимают значения из интервала $(0, \pi)$, на котором функция котангенс монотонно убывает. Поэтому, применяя котангенс к последнему неравенству, получаем равносильное и верное неравенство $x_1 < x_2$. $\square$

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg} x, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ \text{не определена,} & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

также убывает на своей области определения (множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел), так как $\operatorname{arccotg} x_1 > \operatorname{arccotg} x_2$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ таких, что $x_1 < x_2$. $\square$

Пример 3. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg} x, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

не является монотонной на множестве $\mathbb{R}$ (объясните, почему). $\square$

Возрастающие и убывающие функции относят к *строго монотонным* функциям. Определим ниже невозрастающую и неубывающую функции (их называют *монотонными в нестрогом смысле слова*).

Опр. 2. Функция $f(x)$ называется *невозрастающей* (соответственно, *неубывающей*) на сегменте $[a, b]$, если $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \leq f(x_2)$).

Пример 4. Неэлементарная функция *сигнум* (знак числа) $y = \operatorname{sgn} x$ является неубывающей, поскольку неравенство $\operatorname{sgn} x_1 \leq \operatorname{sgn} x_2$ выполняется при любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $x_1 < x_2$. $\square$

Замечание 1. Понятие монотонности допускает и более общие формулировки. Так, для монотонно неубывающей функции можно привести следующее определение: функция $f(x)$ называется монотонно неубывающей на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, если для любых элементов $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство

$$(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0.$$

Существует обобщение понятия монотонной функции, такое как *монотонный оператор*, который будет изучаться вами позже в курсах топологии, линейной алгебры и функциональном анализе. Не углубляясь в данную тему и опуская подробно

⁴При этом функция не обязательно должна быть непрерывной на рассматриваемом множестве, а само множество — не обязательно сплошным (например, функция может быть определена на множестве рациональных чисел и являться на нём монотонной).

сти, скажем лишь, что оператор A в линейном евклидовом пространстве называется *монотонным*, если для любых элементов x_1, x_2 из этого пространства выполняется условие $\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$, где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение элементов. В функциональном анализе монотонный оператор широко применяется при исследовании и приближённом решении краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Оказывается, что монотонность в объединении с некоторыми другими условиями позволяет получать теоремы существования решения у операторных уравнений.

Ранее мы уже имели опыт формулирования отрицаний для части математических определений. Составим, например, отрицание первого из определений, т. е. сформулируем понятие функции, которая не является возрастающей на сегменте $[a, b]$: функция $f(x)$ *не является возрастающей* на $[a, b]$, если $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, такие что $x_1 < x_2$, но при этом $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Замечание 2. Не следует путать понятие функции, являющейся неубывающей на некотором промежутке, и функции, не являющейся убывающей на нём.

Пример 5. Функция $y = x^2$ не относится к неубывающим на всей числовой прямой, но при этом можно сказать, что она не является убывающей на $\mathbb{R}$. $\square$

Отметим, что существует бесконечное множество функций, не являющихся монотонными на всей области определения (например, $\sin x$ и $\frac{1}{x}$). Более того, существуют немонотонные функции, не являющиеся монотонными ни на каком участке своей области существования (например, функция Дирихле). При этом большинство элементарных функций являются монотонными на отдельных промежутках.

Равносильность преобразований уравнений и неравенств с использованием монотонных функций. Следующая теорема, известная ещё из курса элементарной математики, непосредственно вытекает из определения монотонной функции и отражает свойства равносильных преобразований уравнений и неравенств, в которых участвуют строго монотонные функции.

Теорема 1 (*о равносильности перехода при применении к уравнениям и неравенствам строго монотонной функции*). Если функция $f(x)$ строго монотонна на множестве X и $x_1, x_2 \in X$, то равенство $x_1 = x_2$ равносильно равенству $f(x_1) = f(x_2)$. Если функция $f(x)$ возрастает на множестве X , то неравенство $x_1 < x_2$ равносильно неравенству $f(x_1) < f(x_2)$. Если же $f(x)$ убывает на X , то неравенство $x_1 < x_2$ равносильно неравенству $f(x_1) > f(x_2)$.

Следствие (*метод рационализации*). Как было отмечено в замечании 1, для строго монотонной функции разность значений аргумента $x_1 - x_2$ (приращение аргумента) имеет тот же знак, что и разность соответствующих значений функции $f(x_1) - f(x_2)$ (приращение функции) – в случае возрастания

функции f на множестве X , и эти разности противоположны по знаку – в случае убывания f на X . Данное утверждение лежит в основе *метода рационализации*, используемого для упрощения решения логарифмических, показательных, тригонометрических и некоторых других неравенств.

Рассмотрим примеры на применение теоремы 1, в которых существенно используется свойство монотонности функций.

Пример 6. Доказать тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Приведя тождество к виду $\operatorname{arctg} x = \pi/2 - \operatorname{arcctg} x$ и учитывая, что обе его части принимают значения из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, на котором тангенс монотонно возрастает, применим к обеим частям эту функцию и получим равносильное тождество:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right) \Leftrightarrow x = x \quad \text{— верно.}$$

Следовательно, исходное тождество также верно. $\square$

Пример 7. [Олимпиада «Ломоносов–2016», 5]. Найти все решения неравенства

$$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x-5) - \log_{\frac{\pi}{6}}(7-2x)\right) \cdot \left(\cos\left(x + \frac{7}{4}\right) - \cos(2x-1)\right) (|x-4| - |2x-5|) \geq 0.$$

Решение. ОДЗ: $x \in (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$. Во-первых, при этих x модули раскрываются однозначно: $|x-4| = 4-x$, $|2x-5| = 2x-5$. Во-вторых, оценим аргументы косинусов:

$$4\frac{1}{4} = \frac{17}{4} < x + \frac{7}{4} < \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}, \quad 4 < 2x-1 < 6.$$

Видно, что эти аргументы находятся в пределах $(\pi, 2\pi)$, где функция косинус монотонно возрастает. Кроме того, $\log_{\frac{\pi}{6}} t$ монотонно убывает. Принимая всё это в расчёт, согласно методу рационализации исходное неравенство на ОДЗ сводится к равносильному, но при этом существенно более простому неравенству:

$$\begin{aligned} & ((2x-5) - (7-2x)) \left(\frac{\pi}{6} - 1\right) \left(\left(x + \frac{7}{4}\right) - (2x-1)\right) ((4-x) - (2x-5)) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-3)^2 \left(x - \frac{11}{4}\right) \leq 0. \quad \text{Ответ: } x \in \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right] \cup \{3\}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 8. Решить уравнение

$$(2x+1)\sqrt{7+(2x+1)^2} + x\sqrt{x^2+7} = 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(t) = t\sqrt{t^2+7}$, $t \in \mathbb{R}$, тогда уравнение можно переписать в виде $f(2x+1) + f(x) = 0$, или $f(2x+1) = -f(x)$. В силу нечётности

функции $f(t)$ получаем эквивалентное уравнение $f(2x + 1) = f(-x)$. В силу монотонного возрастания функции $f(t)$ последнее уравнение равносильно уравнению $2x + 1 = -x$, откуда приходим к ответу: $x \in \{-\frac{1}{3}\}$. $\square$

Вспомним ещё одну теорему, позволяющую решать один из классов уравнений с использованием свойства монотонности функций.

Теорема 1'. Пусть имеется уравнение $f(x) = g(x)$, в котором функции f и g имеют разную монотонность (одна из них возрастает, а другая – убывает; допускается случай, когда одна из этих функций строго монотонна, а другая – постоянная). Тогда уравнение имеет не более одного решения.¹

Пример 9. Решить уравнение

$$3\sqrt{x^2 - 9} + 4\sqrt{x^2 - 16} + 5\sqrt{x^2 - 25} = \frac{120}{x}.$$

Решение. Левая часть уравнения положительна, значит, и правая тоже, т. е. ОДЗ: $x \geq 5$. В левой части уравнения стоит сумма трёх возрастающих функций, которая сама является возрастающей. В правой части находится убывающая функция. Графики таких функций пересекаются не более, чем в одной точке, следовательно, уравнение имеет не более одного решения. Подбором находим $x = 5$. $\square$

1.2 Свойства монотонных функций. Монотонность в точке

Свойства монотонных функций. Приведём наиболее известные свойства монотонных функций, используемые при решении задач.

1. (Сумма монотонных функций). Если f, g – одинаково монотонные на множестве X функции (обе возрастают, или обе убывают, или обе не возрастают, или обе не убывают на этом множестве), то их сумма $f + g$ имеет то же направление монотонности.

2. (Произведение неотрицательных монотонных функций). Если на множестве X заданы две неотрицательные возрастающие функции f и g , то их произведение $f \cdot g$ также является неотрицательной и возрастающей на этом множестве функцией.

3. (Умножение монотонной функции на константу). Пусть функция f возрастает на множестве X , при этом даны действительные числа $C_1 > 0$, $C_2 < 0$. Тогда функция $C_1 f$ возрастает, а функция $C_2 f$ убывает на X (иными словами, умножение монотонной функции на положительную константу сохраняет, а умножение на отрицательную константу – меняет направление монотонности функции).

¹которое в простейших случаях может быть найдено подбором.

4. (*Ограниченность монотонной на сегменте функции*). Монотонная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена.

5. (*О характере разрывов монотонной на сегменте функции*). Монотонная на сегменте $[a, b]$ функция f может иметь на этом сегменте разрывы только первого рода.

6. (*О счётном количестве точек разрыва монотонной на сегменте функции*). Множество точек разрыва монотонной на сегменте $[a, b]$ функции не более чем счётно.

7. (*Критерий непрерывности монотонной на сегменте функции*). Монотонная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда множество $E(f)$ её значений на этом сегменте является сегментом с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.

8. (*О биективности и обратимости строго монотонных функций*). Строго монотонная функция $f : X \rightarrow Y$ осуществляет взаимно однозначное отображение (биекцию) множества X на Y и поэтому всегда имеет обратную функцию $f^{-1} : Y \rightarrow X$.

9. (*Об одинаковой монотонности взаимно обратных функций*). Взаимно обратные функции имеют одинаковую монотонность, т. е. если одна из них возрастает (убывает), то и другая тоже возрастает (убывает).

Пример 10. Функция $y = \sin x$ возрастает на сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, и обратная к ней функция $y = \arcsin x$ также возрастает на соответствующем сегменте $[-1, 1]$. $\square$

10. (*О разной монотонности функций f и $\frac{1}{f}$*). Если функция f возрастает (убывает) и не обращается в нуль на некотором промежутке, то функция $\frac{1}{f}$ убывает (соответственно, возрастает) на этом промежутке.

11. (*Об одинаковой монотонности функций f , f^{2n+1} , $\sqrt[2n+1]{f}$*). Функции f , f^{2n+1} и $\sqrt[2n+1]{f}$ ($n \in \mathbb{N}$) имеют одинаковую монотонность (одновременно являются возрастающими, невозрастающими, убывающими, неубывающими). Иными словами, возведение функции в нечётную положительную степень, так же как и извлечение корня нечётной степени из функции не меняют её монотонности.

12. (*О сохранении монотонности при объединении смежных промежутков*). Если функция f возрастает (убывает) на каждом из смежных¹ промежутков $[a, b]$ и $[b, c]$, то она возрастает (соответственно, убывает) и на их объединении – отрезке $[a, c]$. Вместо отрезков могут быть смежные полуинтервалы $(a, b]$ и $[b, c)$.

13. (*О влиянии на монотонность основных преобразований графиков функций*). Пусть функция f является монотонной на некотором множестве и $C \in \mathbb{R}$ – заданное число. Тогда преобразования вида $f(x+C)$, $f(x)+C$ (параллельный

¹Точка b принадлежит обоим промежуткам.

перенос графика функции f влево-вправо и вверх-вниз вдоль координатных осей) не меняют монотонности функции.

Преобразования вида $f(Cx)$, $Cf(x)$ не меняют направления монотонности функции при $C > 0$ (растяжение-сжатие вдоль осей абсцисс и ординат), и меняют монотонность на противоположную в случае $C < 0$ (к растяжению-сжатию добавляется осевая симметрия относительно осей ординат и абсцисс).

14. (*О монотонности сложной функции*, обобщение свойства 11). Если функции f и g имеют одинаковую монотонность (обе возрастают или обе убывают – каждая на своём множестве), то сложная функция $f(g)$ является возрастающей. Если же f и g имеют противоположные направления монотонности (одна убывает, а другая – возрастает), то сложная функция $f(g)$ (их композиция) является убывающей. В частности, если функция $f(x)$ строго монотонна, то суперпозиция $f(f(x))$ строго возрастает.

15. (*О существовании конечного предела при $x \rightarrow +\infty$ у монотонной ограниченной функции*). Если функция f монотонна и ограничена на полупрямой $[a, +\infty)$, то существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Пример 11. Сформулируйте аналогичное утверждение для числовых последовательностей.

16. (*Достаточное условие равномерной непрерывности монотонной на интервале функции*). Если монотонная функция f непрерывна и ограничена на конечном или бесконечном интервале (a, b) , то f равномерно непрерывна на (a, b) .

17*. (*Достаточное условие интегрируемости по Риману на сегменте*). Монотонная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на этом сегменте¹.

18*. Монотонная функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема почти всюду.²

Пример 12. *Канторова лестница* – интересный пример непрерывной монотонной на сегменте $[0, 1]$ функции F , которая не является константой, но при этом имеет производную, равную нулю почти во всех точках этого сегмента (во всех точках, кроме *канторова множества*).³ Поскольку суммарная длина внутренних сегментов,

¹Понятие интегрируемости по Риману будет введено далее, но данное свойство для полноты изложения приведём уже сейчас.

²«Почти всюду» означает за исключением множества меры нуль по Лебегу. По определению, множество действительных чисел имеет *меру нуль по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие этого множества не более чем счётной системой интервалов, суммарная длина которых меньше ε .

³Построение «канторовой лестницы». В точках 0 и 1 сегмента $[0, 1]$ значение функции принимается равным соответственно 0 и 1. Далее интервал $(0, 1)$ разбивается на три равные части $(0, \frac{1}{3})$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ и $(\frac{2}{3}, 1)$. На среднем сегменте полагаем $F(x) \equiv \frac{1}{2}$. Оставшиеся два промежутка снова разбиваются на три равные части каждый, и на средних сегментах $F(x)$ полагается, соответственно, равной $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Каждый из оставшихся промежутков снова делится на три равные части, и на внутренних сегментах $F(x)$ определяется как постоянная, равная

на которых F постоянна, равна $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = 1$, то получается, что функция F успеваает вырасти на 1 на множестве меры нуль, оставаясь непрерывной. $\square$

Конечно, перечисленными свойствами не исчерпываются все свойства монотонных функций. Например, в этот список можно было также включить следующие свойства.

19. Пусть функция f возрастает на отрезке $[a, b]$ ($0 < a < b$). Если при этом она является *нечётной*, то она будет возрастать на симметричном отрезке $[-b, -a]$. Если же f является *чётной*, то она, наоборот, убывает на $[-b, -a]$. Для дифференцируемых функций обоснование этого свойства напрямую связано со следующим свойством производной: производная чётной функции является нечётной функцией и, наоборот, производная нечётной функции является чётной функцией.

20. (*Необходимое и достаточное условие монотонности непрерывной взаимно однозначной функции*). Непрерывная функция взаимно однозначна тогда и только тогда, когда она строго монотонна.

21. (*Достаточное условие монотонности непрерывной на сегменте функции, не имеющей экстремумов*). Непрерывная на сегменте функция, не имеющая на этом сегменте ни одного внутреннего (локального) экстремума, монотонна.

Монотонность в точке. Связь с монотонностью на интервале. Наряду с рассмотренным выше понятием функции, монотонной на промежутке, существует понятие возрастания (или убывания) функции в отдельной точке. Правда, для этого функция должна быть определена в некоторой окрестности этой точки. Приведём соответствующие определения.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$.

Опр. 3 (*возрастания/убывания функции в точке*). Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в точке x_0 , если в некоторой окрестности этой точки знак приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$ (соответственно, противоположен ему):

$$\operatorname{sgn}(\Delta f(x_0)) = \operatorname{sgn}(\Delta x)$$

(соответственно, $\operatorname{sgn}(\Delta f(x_0)) = -\operatorname{sgn}(\Delta x)$).

Опр. 3' (*возрастания/убывания функции в точке*). Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в точке x_0 , если при любом достаточно малом $h > 0$ выполняется условие

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

среднему арифметическому между соседними, уже определёнными значениями $F(x)$. И так далее. В остальных точках единичного отрезка функция доопределяется по непрерывности. Полученная функция называется *канторовой лестницей*.

(соответственно, $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$). Аналогично вводятся определения невозрастающей и неубывающей в точке x_0 функции.

Определения 3 и 3' эквивалентны.

Теорема 2 (о связи возрастания функции в точке и на интервале). Функция $f(x)$ возрастает в каждой точке некоторого конечного или бесконечного интервала (a, b) тогда и только тогда, когда она является возрастающей на этом интервале.

Аналогично формулируется теорема для убывающей функции.

1.3 Достаточные условия строгой монотонности в точке и на промежутке

Обратимся к достаточным (необходимым и достаточным) условиям строгой монотонности функции, дифференцируемой в точке или, соответственно, на промежутке.

Теорема 3 (достаточные условия строгой монотонности функции в точке). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Тогда:

- 1) если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает в точке x_0 ;
- 2) если $f'(x_0) < 0$, то $f(x)$ убывает в точке x_0 ;
- 3) если $f'(x_0) = 0$, то ничего определённого о возрастании или убывании функции в точке x_0 сказать нельзя. Необходимо исследовать знак производной в окрестности точки.

Замечание. Подчеркнём, что если функция $f(x)$ возрастает в некоторой точке x_0 , то она *не обязательно* возрастает в некоторой окрестности этой точки. Рассмотрим пример, подтверждающий этот любопытный факт.

Пример 13. [8, № 1287] Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{2}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

возрастает в точке $x = 0$, но не является возрастающей ни в каком интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку, где $\varepsilon > 0$ – произвольное число.

Решение. В самом деле, рассмотрим приращение функции в нуле:

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \Delta x \left(1 + \Delta x \cdot \sin \frac{2}{\Delta x} \right).$$

Очевидно, что при достаточно малых по абсолютной величине значениях Δx знак $\Delta f(0)$ совпадает со знаком Δx . Следовательно, $f(x)$ является возрастающей в точке $x = 0$. С другой стороны, возьмём произвольно малое $\varepsilon > 0$ и вычислим производную при $x \neq 0$:

$$f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{2}{x} - 2 \cos \frac{2}{x}.$$

Рассмотрим последовательность значений аргумента $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что начиная с некоторого n , члены последовательности будут попадать в интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Однако $f'(x_n) = -1 < 0$, что противоречит возрастанию $f(x)$ на $(-\varepsilon, \varepsilon)$. $\square$

Теорема 4 (*критерий возрастания функции на промежутке*). Для того чтобы имеющая на промежутке X конечную или бесконечную производную функция $f(x)$ возрастала на нём, необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) $f'(x) \geq 0$ в любой точке $x \in X$;
- 2) $f'(x)$ не обращалась в нуль ни на каком интервале $(\alpha, \beta) \subset X$.

Иными словами, производная строго монотонной дифференцируемой функции может обращаться в нуль, но не на сплошных промежутках, а в отдельных точках. Аналогичная теорема формулируется и для строго убывающих функций.

Пример 14. Функция $y = x^3$ строго возрастает в точке $x = 0$, несмотря на то, что в этой точке производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль. Существенным в этой ситуации оказывается тот факт, что $x = 0$ – отдельная точка. $\square$

1.4 Применение следствия из теоремы Лагранжа для доказательства тождеств

«Он преподавал математику, был сух и строг, ибо такую точную науку ангелы не преподают».

Александр Вертинский (1889–1957) – русский и советский артист, поэт и певец. Кумир эстрады первой половины 20 века.

Обратимся к известному следствию из теоремы Лагранжа и покажем, как можно использовать его для доказательства тождеств с дифференцируемыми функциями.

Теорема 5 (*следствие из теоремы Лагранжа о постоянстве функции с нулевой производной*).¹ Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X , и имеет внутри него конечную производную $f'(x)$. Для того чтобы $f(x)$ была постоянной на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \equiv 0$ внутри X .

Пример 15. Доказать основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}.$$

¹Постоянные функции $y(x) \equiv \text{const}$ относятся к монотонным, являясь одновременно невозрастающими и неубывающими.

Доказательство. Обозначим $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, эта функция дифференцируема в любой точке и её производная равна $f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos x (-\sin x) \equiv 0$. Отсюда делаем вывод о постоянстве этой функции при всех $x \in \mathbb{R}$. Осталось найти её значение в какой-либо точке, и тогда такое же значение функция будет принимать во всех точках. Поскольку $f(0) = 1$, то в силу сказанного выше $f(x) \equiv 1$. $\square$

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 16. Доказать тождество

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \equiv \pi \cdot \operatorname{sgn} x \quad \text{при } |x| \geq 1.$$

Доказательство. При $|x| > 1$ вычислим производную функции $f(x)$ из левой части тождества:

$$\begin{aligned} \left(2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right)' &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} \equiv 0. \end{aligned}$$

С учётом непрерывности функции на каждом из промежутков $x \geq 1$ и $x \leq -1$, отсюда получаем

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} C_1, & \text{если } x \geq 1, \\ C_2, & \text{если } x \leq -1. \end{cases}$$

Найдём константы C_1 и C_2 . Чтобы определить C_1 , подставим в функцию $f(x)$ вместо x любое удобное для вычисления значение $x \geq 1$, например $x = 1$, и получим $C_1 = \pi$. Подставляя $x = -1$, находим $C_2 = -\pi$. Поэтому $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \equiv \pi \cdot \operatorname{sgn} x$, что и требовалось доказать. $\square$

1.5 Доказательство тождественных неравенств между функциями путем сравнения их производных

При доказательстве многих функциональных неравенств вида $\varphi(x) > \psi(x)$ (при $x > x_0$) используется сравнение скоростей роста n -кратно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, совпадающих в точке x_0 . Сформулируем и докажем соответствующую теорему.

Теорема 6 [8, № 1288] Если:

- 1) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ n -кратно дифференцируемы при $x > x_0$;
- 2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$);
- 3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > x_0$,

то при $x > x_0$ имеет место неравенство $\varphi(x) > \psi(x)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ при $x \geq x_0$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем при $x > x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n,$$

где $x_0 < \xi < x$. Учитывая, что по условию $f(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(\xi) > 0$, получаем $f(x) > 0$. $\square$

Рассмотрим пример.

Пример 17. [8, № 1289(а)] Доказать и дать геометрическую интерпретацию неравенству: $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x > 0$. Положим $\varphi(x) = e^x, \psi(x) = 1 + x$. Заметим, что $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ при $x > 0$. Следовательно, по теореме 6 имеем $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > 0$.

2) Пусть теперь $x < 0$. Положим $t = -x$, тогда неравенство примет вид $e^{-t} > 1 - t$. Имеем: $\varphi(t) = e^{-t}, \psi(t) = 1 - t, t \geq 0$. Поскольку $\varphi'(t) = -e^{-t} > -1 = \psi'(t)$ при $t > 0$, то $\varphi(t) > \psi(t)$ при $t > 0$, т. е. $e^x > 1 + x$ при $x < 0$. Графическое обоснование неравенства выполните самостоятельно. $\square$

1.6 Монотонность параметрически и неявно заданных плоских кривых

*«Век такой сумасшедший. От одного радио можно с ума сойти.
А телефоны? А телевизор? А всякие магнитофоны? Ужас! Кошмар!
И всё это орёт как зарезанное...»*

*Александр Вертинский (1889–1957) – русский и
советский артист, поэт и певец. Кумир эстрады
первой половины 20 века.*

Случай параметрического задания кривой. Ранее мы изучали способы вычисления производных у функций (кривых) $y(x)$, заданных в декартовой системе координат параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T,$$

где функции $x(t), y(t)$ дифференцируемы на промежутке T . В частности, первая производная $\frac{dy}{dx}$ находится по правилу $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ (в предположении $x'_t \neq 0$).

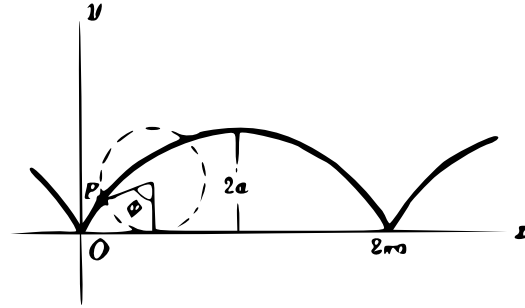


Рис. 1: Циклоида.

При исследовании таких функций $y(x)$ на монотонность промежутки убывания и возрастания стандартно определяются по знаку производной y'_x . Единственная разница – промежутки монотонности находятся в зависимости от параметра t . Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 18. Найти участки монотонности *циклоиды*¹

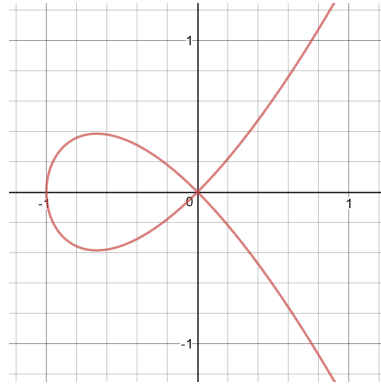
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0). \end{cases}$$

Решение. Вычислим первую производную: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ и оценим её знак. Поскольку знаменатель дроби положителен во всех случаях, когда не обращается в нуль, то $y' > 0$ при $\sin t > 0$, т. е. функция возрастает на интервалах $t \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$ и убывает на интервалах $t \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. В пересчёте на x это соответствует возрастанию функции $y(x)$ на интервалах $x \in (2\pi ka, a(\pi + 2\pi k))$ и её убыванию на интервалах $x \in (a(\pi + 2\pi k), a(2\pi + 2\pi k))$ (Рис. 1). □

Случай неявного задания кривой. Если кривая $y(x)$ задана неявным уравнением $F(x, y) \equiv 0$, то для исследования её на монотонность либо переходят к явному заданию (к сожалению, это не всегда удобно и возможно), либо находят параметрические уравнения кривой (см. предыдущий пункт). Наконец, можно вычислить производную по правилу дифференцирования неявных функций. Иногда имеет смысл перейти к полярным координатам и там провести необходимое исследование.

Пример 19. Не выражая явно y через x , найти промежутки возрастания и убывания кривой $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.

¹Известная трансцендентная кривая, определяется следующим образом. Представим, что круг радиуса a катится по прямой Ox без скольжения. Пусть в начальный момент $t = 0$ точка M окружности находится в начале координат. Тогда траектория движения точки M будет описываться *циклоидой*. При этом участок кривой, отвечающий промежутку $0 \leq x \leq 2\pi a$, называют *первой аркой* циклоиды.

Рис. 2: Кривая $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.

Решение. Найдём область определения $y(x)$: $y^2 = x^2(x + 1) \geq 0$, откуда $D(y) = [-1, +\infty)$. Вычислим теперь при $y \neq 0$ первую производную, продифференцировав исходное уравнение по переменной x :

$$3x^2 + 2x - 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x(3x + 2)}{2y}.$$

Кривая симметрична относительно $y = 0$ (Рис. 2), поэтому достаточно исследовать её на монотонность в верхней полуплоскости $y \geq 0$. Имеем $y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x(3x + 2)}{2y} > 0$.

При $y > 0$ решая неравенство $x(3x + 2) > 0$, находим, что функция возрастает при $x \in (-1, -\frac{2}{3}) \cup (0, +\infty)$ и, соответственно, убывает при $x \in (-\frac{2}{3}, 0)$. $\square$

1.7 Монотонность в полярной системе координат

Понятие полярной системы координат. В полярной системе координат вместо двух взаимно перпендикулярных координатных осей, которые мы привыкли видеть в декартовой (прямоугольной) системе координат, есть только одна – полярная – ось. Каждая точка M на плоскости (кроме начала координат) однозначно задаётся двумя координатами: r (*полярный радиус*) и φ (*полярный угол*). Смысл первой из координат – это расстояние от начала координат (*полюса* O) до точки M (т. е. длина радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$). Вторая координата φ – это угол, откладываемый от полярной оси (обычно расположенной горизонтально и направленной вправо от полюса) до направления радиус-вектора точки M . Для угла φ *положительным* считается направление отсчёта против часовой стрелки. В простейшем случае области изменения координат таковы: $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Уравнение $\varphi = 0$ описывает полярную ось. В более общем случае для второй из координат допускаются любые

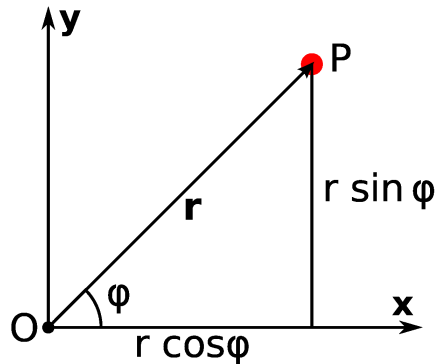


Рис. 3: Полярные координаты.

действительные значения $\varphi \in \mathbb{R}$, и тогда все лучи вида $\varphi = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, совпадают с полярной осью, а значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0 \leq \varphi < 2\pi$, называется главным.

Существует также обобщённая полярная система координат, в которой на переменную r не накладываются ограничения неотрицательности и считается $r \in \mathbb{R}$. В этом случае, например, чтобы изобразить точку с координатами $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$, надо провести луч $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и отложить от полюса отрезок длины 1 в направлении, противоположном этому лучу.

В полярной системе координат, так же как и в прямоугольной, функция (кривая) может быть задана *явно*, *неявно* и *параметрически*. «Явно» означает, что функция задана уравнением, разрешённым относительно одной из переменных: $r = r(\varphi)$ или $\varphi = \varphi(r)$.

Пример 20. Если в паре (r, φ) зафиксировать переменную r , положив $r = R$ (φ – произвольно), то получим явное (полярное) уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R : $r = R$. Если, наоборот, зафиксировать вторую переменную, положив $\varphi = \varphi_0$ (при $r \geq 0$ – произвольном), то получим луч, выходящий из начала координат, определяемый явным уравнением $\varphi = \varphi_0$. $\square$

«Неявно» означает задание кривой уравнением, не разрешённым относительно ни одной из переменных, т. е. уравнением вида $F(r, \varphi) \equiv 0$. «Параметрически» плоская кривая задаётся в полярных координатах системой двух уравнений с параметром t :

$$\begin{cases} r = r(t), \\ \varphi = \varphi(t), \quad t \in T. \end{cases}$$

Имеется понятие *совмещённых* прямоугольной и полярной систем координат (Рис. 3). Так их называют в случае, когда начала координат обеих систем

совпадают, и при этом ось абсцисс Ox направлена вдоль полярной оси OP (масштабные единицы также равны). В этом случае существуют формулы перехода из одной системы координат в другую. Так, зная полярные координаты r и φ , отвечающие им прямоугольные координаты находят по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

Формулы обратного перехода имеют, соответственно, вид

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения некоторых кривых имеют более простой вид, будучи записанными в декартовых координатах, у других кривых уравнение выглядит проще (а значит, и исследовать кривую будет проще) в полярной или иных системах координат.

Пример 21. Окружность с центром в начале координат и радиусом R в прямоугольной системе координат, как известно, задаётся неявным уравнением $x^2 + y^2 = R^2$. С другой стороны, эту плоскую кривую можно определить при помощи параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a \cos t + b \sin t, \\ y = b \cos t - a \sin t \end{cases} \quad (R = \sqrt{a^2 + b^2}),$$

где $t \in [0, 2\pi)$. При этом изменению параметра $t \in [0, 4\pi)$ отвечает двойной обход окружности против часовой стрелки с возвращением в исходную точку $(x, y) = (R, 0)$ (или, во втором случае, в точку $(x, y) = (a, b)$). Но гораздо проще уравнение данной кривой выглядит в (совмещённой) полярной системе координат: $r = R$. $\square$

Пример 22. Окружность с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом R в прямоугольной системе координат может быть задана неявно уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ или параметрически, например, системой

$$\begin{cases} x - x_0 = R \cos t, \\ y - y_0 = R \sin t. \end{cases}$$

Введением векторов $\vec{r} = \{x, y\}$ и $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0\}$, а также единичного вектора $\vec{l} = \{\cos t, \sin t\}$, $t \in [0, 2\pi)$, параметрические уравнения порождают *векторное уравнение* окружности:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = R \cdot \vec{l}. \quad \square$$

Пример 23. Прямую в полярных координатах можно задать уравнением

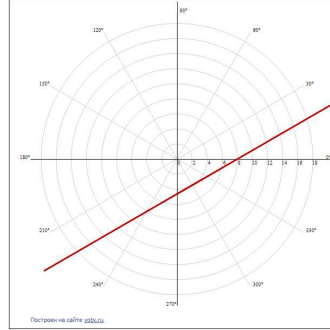


Рис. 4: Прямая $r = \frac{4}{\cos(\varphi + \frac{\pi}{3})}$.

$$r = \frac{a}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

где a – расстояние от прямой до полюса, α – угол между полярной осью и прямой, проходящей через полюс перпендикулярно данной прямой. $\square$

Пример 24. Доказать, что уравнение $r = \frac{4}{\cos(\varphi + \frac{\pi}{3})}$ задаёт прямую линию (Рис. 4), найти уравнение этой прямой в совмещённой декартовой системе координат и построить её.

Решение. *1-й способ* (переход в прямоугольную систему координат). Имеем

$$r = \frac{4}{\cos \varphi \cos \frac{\pi}{3} - \sin \varphi \sin \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow r = \frac{4}{\frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi}.$$

Умножим уравнение на знаменатель дроби и заменим $r \cos \varphi$ на x , а $r \sin \varphi$ на y :

$$r \left(\frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

2-й способ (использование преобразований поворота, растяжения–сжатия и др.). Кривая $r \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right) = 4$ получается из кривой $r \cos \varphi = 4$ (т. е. $x = 4$) поворотом по часовой стрелке вокруг полюса на угол $\pi/3$. $\square$

Пример 25. Эллипс с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$ – полуоси) параметризуется в декартовых координатах уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \text{ где } t \in [0, 2\pi). \square$$

Пример 26. В полярных координатах эллипс с полуосями a и b ($a > b$) и началом координат в фокусе задаётся уравнением

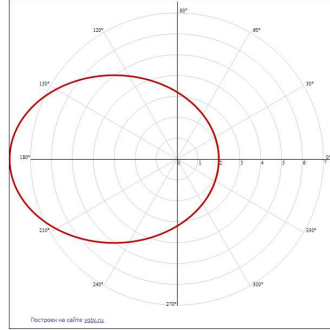


Рис. 5: Эллипс $r = \frac{16}{5 + 3 \cos \varphi}$.

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

где φ удовлетворяет условию $1 - \varepsilon \cos \varphi > 0$, $p = \frac{b^2}{a}$ – фокальный параметр эллипса, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ – эксцентриситет эллипса (Рис. 5). $\square$

Пример 27. В декартовых координатах гиперболу с полуосями a , b и центром в точке $(0, 0)$ можно задать неявно каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ или параметрическими уравнениями (разные знаки отвечают разным ветвям кривой)

$$\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad \text{где } t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Пример 28. В полярных координатах одна из ветвей гиперболы с полуосями a и b и фокусом в начале координат задаётся уравнением

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

(φ удовлетворяет неравенству $1 - \varepsilon \cos \varphi > 0$), где $p = b^2/a$ – фокальный параметр гиперболы, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$ – эксцентриситет гиперболы (Рис. 6). $\square$

Пример 29. В декартовых координатах параболу с фокальным параметром $p > 0$ и вершиной в точке $(0, 0)$ можно задать уравнениями $y^2 = \pm 2px$ или $x^2 = \pm 2py$. $\square$

Пример 30. В полярных координатах параболу с фокальным параметром p и фокусом в начале координат можно задать уравнением

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

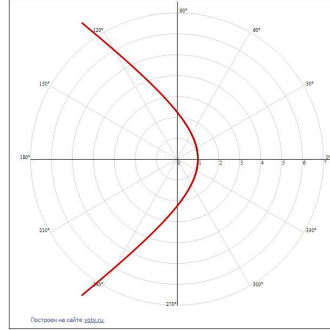


Рис. 6: Ветвь гиперболы $r = \frac{9}{4 + 5 \cos \varphi}$.

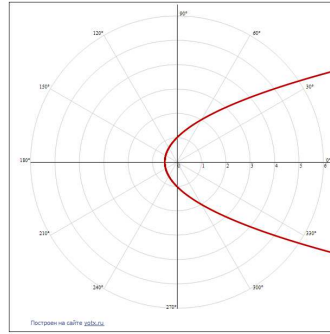


Рис. 7: Парабола $r = \frac{1}{1 - \cos \varphi}$.

(φ удовлетворяет $1 - \varepsilon \cos \varphi > 0$), где $\varepsilon = 1$ – эксцентриситет параболы (Рис. 7).¹ $\square$

Пример 31. В математическом анализе известна кривая, называемая *лемнискатой Бернулли*. В декартовой системе координат она определяется неявным уравнением

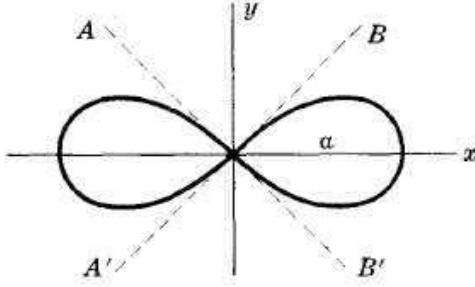
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

где $a > 0$ – параметр. Найти уравнение этой кривой в полярной системе координат.

Решение. Воспользуемся формулами (1) перехода к полярным координатам. Подставив $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ в уравнение, получим

$$r^4 = a^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).$$

¹Заметим, что в полярных координатах уравнения эллипса, гиперболы и параболы (кривые относятся к коническим сечениям) совпадают, но описывают разные линии, поскольку отличаются эксцентриситетами: для эллипса $\varepsilon < 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$, для параболы $\varepsilon = 1$. Значения угла φ везде удовлетворяют неравенству $r(\varphi) > 0$.

Рис. 8: Лемниската Бернулли $r = \sqrt{a \cos 2\varphi}$.

При $r \neq 0$ сокращаем на r^2 и с учётом неотрицательности r окончательно находим искомое уравнение $r = \sqrt{a \cos 2\varphi}$ (Рис. 8). $\square$

Замечание. Если кривая задана в полярных координатах явно уравнением $r = r(\varphi)$, где $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$, то её параметрические уравнения в прямоугольных координатах легко получаются при помощи формул перехода от полярных координат к совмещённым декартовым, а именно:

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi, \\ y = r(\varphi) \sin \varphi, \end{cases}$$

в которых переменная φ теперь выступает в качестве параметра, изменяющегося в пределах множества $[\varphi_0, \varphi_1]$. Аналогично, если кривая задана явно уравнением, разрешённым относительно φ , т. е. $\varphi = \varphi(r)$, где $r \in [r_0, r_1]$, то по тем же формулам перехода получаем следующую параметризацию:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi(r), \\ y = r \sin \varphi(r), \end{cases} \quad \text{где } r \in [r_0, r_1].$$

Если же кривая в полярных координатах задана параметрическими уравнениями $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, то для перехода к прямоугольным координатам применяются формулы

$$\begin{cases} x = r(t) \cos \varphi(t), \\ y = r(t) \sin \varphi(t), \end{cases} \quad \text{где } t \in [t_0, t_1].$$

Монотонность в полярной системе координат. Монотонные функции в полярных координатах определяются с математической точки зрения аналогично, но, принимая во внимание полюсо-центричность этой системы, в результате получаем иной эффект. Приведём соответствующее определение для случая возрастающей функции.

Опр. 1 (*возрастающей функции*). Функция $r(\varphi)$ называется *возрастающей на сегменте* $[\alpha, \beta]$, если для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in [\alpha, \beta]$ таких, что $\varphi_1 < \varphi_2$, выполняется неравенство $r(\varphi_1) < r(\varphi_2)$.

Сравним понятия монотонно возрастающей функции в (совмещённых) прямоугольной и полярной системах координат. В прямоугольной системе координат Oxy возрастание функции $y = y(x)$ означает, что при смещении абсциссы точки $M(x, y)$ вправо вдоль оси Ox ордината точки увеличивается, т. е. движение происходит одновременно «слева–направо» и «снизу–вверх». В полярной системе координат монотонное изменение функции $r = r(\varphi)$ интерпретируется иначе: имеется центр (полюс), и возрастание означает, что при повороте точки $M(r, \varphi)$ против часовой стрелки (в положительном направлении) точка одновременно *удаляется* от начала координат (полюса O). Соответственно, убывание функции $r(\varphi)$ понимается так, что с увеличением φ точка графика *приближается* к полюсу O .

С учётом этой особенности, в полярных координатах справедливы следующие достаточные условия монотонности (аналоги теорем 3 и 4).

Теорема 3' (*достаточные условия строгой монотонности функции, дифференцируемой в заданной точке*). Пусть функция $r(\varphi)$ дифференцируема в точке φ_0 . Тогда:

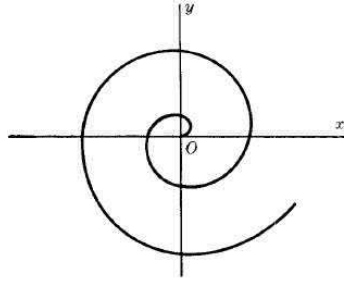
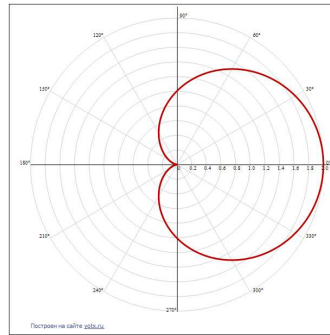
- 1) если $r'(\varphi_0) > 0$, то функция $r(\varphi)$ возрастает в точке φ_0 ;
- 2) если $r'(\varphi_0) < 0$, то $r(\varphi)$ убывает в точке φ_0 ;
- 3) если $r'(\varphi_0) = 0$, то ничего определённого о возрастании или убывании функции в точке φ_0 сказать нельзя (необходимо исследовать знак производной в окрестности точки).

Теорема 4' (*критерий возрастания функции, имеющей производную на промежутке*). Для того чтобы имеющая на промежутке Φ конечную или бесконечную производную функция $r(\varphi)$ возрастала на нём, необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) $r'(\varphi) \geq 0$ в любой точке $\varphi \in \Phi$;
- 2) $r'(\varphi)$ не обращалась в нуль ни на каком интервале $(\alpha, \beta) \subset \Phi$.

Пример 32. Кривая, задаваемая в полярных координатах уравнением $r = \varphi$, называется *спиралью Архимеда*¹. Найти область определения данной функции и показать, что функция является возрастающей.

¹*Спираль Архимеда* – это особый вид спирали с постоянным расстоянием между витками. Благодаря этому свойству она широко распространена при проектировании катушек и пружин. Уравнение спирали Архимеда в полярной системе координат: $r = a + b\varphi$, где $a > 0$ и $b > 0$ – параметры, определяющие начальный радиус спирали и расстояние между витками, которое равно $2\pi b$. Спираль Архимеда иногда называют *арифметической спиралью*. Такое название связывают с арифметической зависимостью расстояния от начала кривой до точек спирали, находящихся на одной радиальной линии.

Рис. 9: Спираль Архимеда $r = \varphi$.Рис. 10: Кривая $r = 1 + \cos \varphi$.

Решение. Поскольку переменная r в полярной системе координат принимает неотрицательные значения, то и правая часть уравнения, т. е. φ , может принимать такие же значения. Таким образом, функция определена на множестве $\varphi \in [0, +\infty)$. Покажем, что функция возрастает. В самом деле, $r(\varphi)$ дифференцируема при $\varphi > 0$, найдём её производную: $r'_\varphi = 1 > 0$. Так как производная положительна при $\varphi > 0$ и функция непрерывна при $\varphi \in [0, +\infty)$, то $r(\varphi)$ монотонно возрастает на всей указанной полупрямой (Рис. 9). $\square$

Пример 33. Найти область определения и промежутки возрастания и убывания

$$r = 1 + \cos \varphi.$$

Решение. Так как $1 + \cos \varphi \geq 0$ выполняется при всех $\varphi \in \mathbb{R}$, то данная функция определена при всех действительных φ (период равен 2π). При этом она дифференцируема и $r'_\varphi = -\sin \varphi$. Функция возрастает на промежутках, где $-\sin \varphi > 0$ (т. е. при $\varphi \in (-\pi + 2\pi n, 2\pi n)$) и убывает, где $-\sin \varphi < 0$ (т. е. при $\varphi \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$), $n \in \mathbb{Z}$ (Рис. 10). $\square$

Если кривая в полярных координатах задана неявно, то при её исследовании применяются подходы, аналогичные тем, что используются в декартовых

системах координат.

Пример 34. Кривая задана в полярной системе координат неявно уравнением

$$r^2 + \varphi^2 = 1.$$

Найти допустимые значения φ , а также промежутки возрастания и убывания $r(\varphi)$.

Решение. 1-й способ. Возможно привести уравнение к явному виду, разрешив его относительно неотрицательной переменной r : $r = \sqrt{1 - \varphi^2}$, где $\varphi \in [-1, 1]$. Вычислим производную $r'_\varphi = -\frac{\varphi}{\sqrt{1 - \varphi^2}}$, $\varphi \in (-1, 1)$. Тогда функция возрастает, если $r'_\varphi > 0$, т. е. при $\varphi \in (-1, 0)$, и убывает при $r'_\varphi < 0$, т. е. при $\varphi \in (0, 1)$.

2-й способ. Продифференцируем уравнение по переменной φ : $2rr'_\varphi + 2\varphi = 0$, откуда выражаем первую производную: $r'_\varphi = -\frac{\varphi}{r}$ (при $r \neq 0$). Далее аналогично сделанному выше исследуем знак производной.

3-й способ. Параметризуем кривую: $r = \cos t$, $\varphi = \sin t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Найдём производную: $r'_\varphi = \frac{r'_t}{\varphi'_t} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Функция возрастает, если $r'_\varphi > 0$, т. е. при $t \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ($\varphi \in (-1, 0)$) и убывает, если $r'_\varphi < 0$, т. е. при $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ ($\varphi \in (0, 1)$). $\square$

В заключение ещё раз обратим внимание на два основных *способа исследования функций на монотонность*: это использование определения (чаще используется для недифференцируемых функций) и нахождение промежутков знакопостоянства первой производной (для дифференцируемых функций, на участках дифференцируемости).

Мы говорили о монотонности функции, а если монотонной является не сама функция, а её первая производная? Функция приобретает особенность, связанную с выпуклостью её графика. Но это тема следующего семинара.

1.8 Задачи для самостоятельного решения

Не используя производной, исследовать монотонность функций, заданных явно в прямоугольной системе координат (при помощи определения и свойств монотонных функций):

№1. $y = x^5 + 2x^2 - \operatorname{arctg}(3x + 1) + \sqrt[3]{x + 6} - \frac{1}{1 + x} + \operatorname{arctg}^3 x$ ($x > 0$);

№2. $y = \operatorname{sgn}(x^3) \cdot (1 - \operatorname{sgn}^2 x)$, $x \in \mathbb{R}$;

№3. а) $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$; б) $y = 3x - 2|x - 2|$, $x \in \mathbb{R}$;

№4. $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 2001| + |x - 2002|$, $x \in \mathbb{R}$.

№5. Является ли функция монотонной на своей области определения:

а) $y = \log_{|\operatorname{tg} x|} 2$; б) $y = \frac{1}{\{5x\}}$; в) $y = \sqrt{|\sin |x||}$; г) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

Ответ обосновать.

Используя производную, исследовать монотонность функций, заданных явно в прямоугольной системе координат:

№6. а) $y = x + \operatorname{arctg} x$; б) $y = -\frac{1}{\arccos x}$.

№7. [8, № 1270] Определить промежутки монотонности в строгом смысле (возрастания или убывания) функции: $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

№8. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$;

№9. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($a > 0$) (*цепная линия*).¹

№10. Найти промежутки возрастания и убывания функций

а) $y = (x + 1)^2 e^{2x}$; б) $y = x + 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$.

№11. [8, № 1272] Определить промежутки строгой монотонности функции

$$y = x + \sin x.$$

№12. [8, № 1276] Определить промежутки строгой монотонности функции

$$y = x^n e^{-x} \quad (n > 0, x > 0).$$

№13. [8, № 1278] Определить промежутки строгой монотонности функции

$$y = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right), \text{ если } x > 0, \text{ и } f(0) = 0.$$

¹Цепная линия – это кривая, форму которой под действием силы тяжести принимает нерастяжимая нить с закреплёнными концами.

№14. Исследовать функцию на монотонность:

$$y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

№15. [8, № 1280] Доказать, что функция

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

возрастает на каждом из интервалов $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$.

№16. При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 48x + 4$$

является монотонной на всей числовой прямой?

Доказать тождества и неравенства (с помощью теорем 5, 6 и других подходов):

№17. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1$ при $x \in \mathbb{R}$ (*основное гиперболическое тождество*).

№18. $e^x > 1 + \ln(1+x)$ при $x > 0$;

№19. [8, № 1289] Доказать неравенство (с помощью теоремы 6) и дать ему геометрическую интерпретацию, построив графики этих функций:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad \text{при } x > 0.$$

№20. [8, № 1290] Доказать, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство

$$\frac{2x}{\pi} < \sin x < x.$$

Каков его геометрический смысл?

№21. [8, № 1291] Доказать, что при $x > 0$ имеет место неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

№22. [8, № 1297(а)] Доказать неравенство с помощью теоремы 6:

$$x^\alpha - 1 > \alpha(x-1) \quad \text{при } \alpha \geq 2, x > 1.$$

№23. [8, № 1297(в)] Доказать неравенство: 1) с помощью теоремы 6, 2) подстановкой $t = x^2$:

$$1 + 2 \ln x \leq x^2 \quad \text{при } x > 0.$$

№24. Доказать, что $\ln x < \frac{x}{e}$ при $x > 0$, $x \neq e$. Что больше: e^π или π^e ?

№25. Доказать неравенство $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ для всех $x > 0$.

Решить теоретические задачи, связанные с монотонностью функций:

№26. [8, № 1283] Обязательно ли производная монотонной функции также является монотонной функцией? Рассмотреть пример $y = x + \sin x$.

№27. Пусть функция f не является монотонной на $[a, b]$. Может ли на этом отрезке существовать обратная к ней функция f^{-1} ?

№28. Привести примеры функций, определённых на множестве мощности континуум, возрастающих: а) в единственной точке, б) в счётном числе точек.

№29. Пусть при всех $x, y \in \mathbb{R}$ дифференцируемая функция f удовлетворяет неравенству

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

Доказать, что f – постоянная функция на $\mathbb{R}$.

№30. Привести примеры двух возрастающих функций, таких что их произведение: а) является возрастающей функцией; б) не является монотонной функцией.

№31. Функции $f(g)$ и $g(x)$ дифференцируемы (каждая – на своём множестве) и являются возрастающими. Доказать, что сложная функция $f(g(x))$ также является возрастающей. Насколько существенно здесь требование дифференцируемости функций?

№32. Может ли функция, определённая на сегменте и имеющая почти всюду на этом сегменте равную нулю производную, принимать все значения из некоторого сегмента?

№33. Сформулируйте определение периодической функции. Может ли периодическая функция быть монотонной?

№34. Привести пример функции, определённой на всей числовой прямой и при этом не являющейся монотонной ни на каком интервале этой прямой.

№35. [8, № 1284] Доказать, что если $\varphi(x)$ – монотонно возрастающая дифференцируемая функция и $|f'(x)| \leq \varphi'(x)$ при $x \geq x_0$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0) \text{ при } x \geq x_0.$$

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

№36. Привести пример монотонной функции, имеющей на сегменте $[0, 1]$ счётное число точек разрыва.

№37. Привести пример функции, заданной на $[-1, 1]$, возрастающей в точке $x_0 = 0$ и не являющейся монотонной на сегменте $[-\delta, \delta]$ при всех $\delta \in (0, 1]$.

Задачи, связанные с разными способами представления функций:

№38. Дана прямая $y = 1 - x$, где $x \in \mathbb{R}$. Требуется: 1) написать параметрические уравнения этой прямой в прямоугольных координатах; 2) найти

уравнение прямой в совмещённой полярной системе координат.

№39. Кривая задана в декартовой системе координат неявным уравнением

$$x^2 + y^2 = x.$$

- 1) Преобразовать уравнение кривой к полярным координатам;
- 2) найти параметрические уравнения кривой в прямоугольных координатах;
- 3) изобразить кривую.

№40. Найти параметрические уравнения кривых

$$\text{а) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \text{б) } \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1 \quad (a > 0, b > 0).$$

№41. Известно, что кривую $y = x^2$ ($x \geq 0$) можно задать параметрическими уравнениями $x = \sqrt{t}$, $y = t$, где $t \in [0, +\infty)$. Привести пример иной параметризации данной кривой. Построить линию, заданную уравнениями $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$ ($t \in \mathbb{R}$).

№42. Какая известная кривая задана уравнениями

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2t, \\ y = \operatorname{arctg} 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

№43. Найти явное уравнение кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

№44. Найти неявное уравнение кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = 4 \cos t + 3 \sin t, \\ y = 3 \cos t - 4 \sin t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Исследовать на монотонность кривые, заданные параметрически, неявно, в том числе в полярных координатах:

№45. Найти участки монотонности кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

№46. Найти промежутки возрастания и убывания $y(x)$, если кривая задана неявно уравнением

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0, \text{ декартов лист}).$$

Указание. Найти параметрические уравнения кривой, положив $y = tx$.

№47. В полярной системе координат найти координаты (r, φ) точек, симметричных точкам $A(3, \frac{\pi}{6})$, $B(5, \frac{2\pi}{3})$, $C(2, -\frac{\pi}{6})$, $D(-2, \frac{\pi}{6})$, относительно: 1) полюса; 2) полярной оси; 3) прямой, проходящей через полюс перпендикулярно полярной оси. Считать $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

№48. Найти прямоугольные координаты точек $A(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$, $B(7, \frac{\pi}{2})$, $C(3, \frac{5\pi}{4})$, $D(1, -\frac{\pi}{4})$, заданных в полярных системе, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось – с положительным направлением оси Ox .

№49. Исследовать на монотонность и построить *гиперболическую спираль*

$$r = \frac{1}{\varphi}.$$

№50. Найти участки монотонности функции $r = \cos \varphi$. Какую кривую задаёт на плоскости это уравнение (изобразите её). Как выглядит кривая, заданная уравнением $r = -\cos \varphi$? $r = \sin \varphi$? $r = -\sin \varphi$?

№51. Найти промежутки возрастания и убывания функции, заданной в полярной системе координат уравнением¹

$$r = a \cos 3\varphi \quad (a > 0).$$

№52. Одна и та же *кардиоида* задана уравнениями $(a > 0)$:²

$$1) (x^2 + y^2 + 2ax)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$$

(неявное уравнение в прямоугольных координатах);

$$2) \begin{cases} x = 2a \cos t - a \cos 2t - a, \\ y = 2a \sin t - a \sin 2t; \end{cases}$$

(параметрические уравнения в прямоугольных координатах);

$$3) r = 2a(1 - \cos \varphi) \text{ (уравнение в полярных координатах).}$$

Исследовать кривую на монотонность в прямоугольных или полярных координатах.

№53. Найти участки монотонности кривой, заданной параметрически в полярной системе координат:

$$\begin{cases} r = 3t - t^3, \\ \varphi = 2t - t^2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

¹Кривая называется *трёхлепестковой розой*, или *трилистником*.

²*Кардиоида* – плоская линия, которая описывается фиксированной точкой окружности, катящейся по неподвижной окружности с таким же радиусом a . Получила своё название из-за схожести своих очертаний со стилизованным изображением сердца. Кардиоида является частным случаем *улитки Паскаля*.

1.9 Ответы и решения

1. Степенная функция $y = x^5$ возрастает на $(0, +\infty)$, что легко доказывается по определению возрастающей функции. В самом деле, если взять произвольные значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $0 < x_1 < x_2$, то по свойствам степеней имеем $x_1^5 < x_2^5$. Функция $y = 2x^2$ также возрастает при $x > 0$. Функция $y = \operatorname{arccotg} x$ убывает на рассматриваемом промежутке; график функции $y = \operatorname{arccotg}(3(x + \frac{1}{3}))$ получается из графика арккотангенса в результате последовательного применения двух преобразований: сжатия в 3 раза вдоль оси абсцисс и смещения влево на одну треть. Оба преобразования не влияют на монотонность, поэтому эта функция тоже убывает, а следовательно, взятая со знаком минус, она возрастает. Далее, функция $y = \sqrt[3]{x+6}$ является возрастающей как сложная функция (возрастающая $g(h) = \sqrt[3]{h}$ от возрастающей $h(x) = x + 6$). Функция $y = 1 + x$ положительна и возрастает, тогда функция $\frac{1}{1+x}$ положительна и убывает, а функция $(-\frac{1}{1+x})$ отрицательна и возрастает на $(0, +\infty)$. Наконец, $\operatorname{arctg} x$ является возрастающей функцией и при возведении в нечётную степень сохраняет своё возрастание. Сумма же шести возрастающих функций есть возрастающая функция.

2. Упростим функцию: $y \equiv 0$. Функция постоянна и, следовательно, монотонна в нестрогом смысле слова (одновременно является неубывающей и невозрастающей на $\mathbb{R}$).

3. а) Выделяя целую часть, преобразуем дробно-линейную функцию к виду

$$y = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1},$$

откуда определяем: $x = -1$ – вертикальная асимптота гиперболы, $y = 2$ – её горизонтальная асимптота; при $x > -1$ имеем $y < 2$, при $x < -1$ получаем $y > 2$. График центрально симметричен относительно точки $(-1, 2)$. Кроме того, из полученного представления видно, что функция монотонно возрастает на каждом из промежутков $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$ (но при этом не является возрастающей на их объединении).

б) Раскрывая модуль, получаем

$$y = \begin{cases} x+4 & \text{при } x \geq 2, \\ 5x-4 & \text{при } x < 2. \end{cases}$$

Отсюда видно, что функция возрастает на каждом из промежутков $x \in (-\infty, 2)$ и $x \in [2, +\infty)$. Кроме того, функция непрерывна в точке $x = 2$. Отсюда следует возрастание функции на всём множестве $(-\infty, +\infty)$.

4. 1) При $x < 1001$ модули $|x-1|, |x-2|, \dots, |x-1000|$ (их ровно 1000 штук) раскрываются со знаками «-» или «+», а модули $|x-1001|, |x-1002|, \dots$,

$|x - 2002|$ (их 1002 штуки) – со знаком «–». Следовательно, функция убывает на этом промежутке.

2) При $x > 1002$ модули $|x - 1|, |x - 2|, \dots, |x - 1002|$ (их ровно 1002 штуки) раскрываются со знаками «+», а остальные (их 1000 штук) – со знаком «–». Следовательно, функция возрастает на данном промежутке.

3) При $1001 \leq x \leq 1002$ модули $|x - 1|, |x - 2|, \dots, |x - 1001|$ (их 1001 штука) раскрываются со знаком «+», а модули $|x - 1002|, |x - 1003|, \dots, |x - 2002|$ (их тоже 1000 штук) – со знаком «–». Следовательно, все x сокращаются и остаётся некоторое число, т. е. функция постоянна (одновременно является невозрастающей и неубывающей на этом отрезке).

5. а) Функция определена всюду, кроме точек $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, в которых основание равно 0, 1 или не определено, является периодической с периодом π (объясните, почему), при этом отлична от постоянной, и поэтому монотонной быть не может.

б) Функция определена во всех точках, кроме $x = \frac{n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$, периодична с периодом $T = \frac{1}{5}$ (докажите), отлична от постоянной, и поэтому не является монотонной.

в) Функция определена всюду, периодична с периодом $T = \pi$, отлична от постоянной, и поэтому не является монотонной.

г) Функция определена всюду, кроме точек $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, и на интервалах между этими точками принимает постоянное значение, равное 1. Функция относится к неубывающим и, одновременно, к невозрастающим.

6. а) 1-й способ. Функция строго возрастает на всём множестве действительных чисел как сумма двух возрастающих функций.

2-й способ. Вычислим производную: $y' = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0$. Следовательно, функция является возрастающей на $\mathbb{R}$.

б) Данная функция определена при $x \in [-1, 1)$.

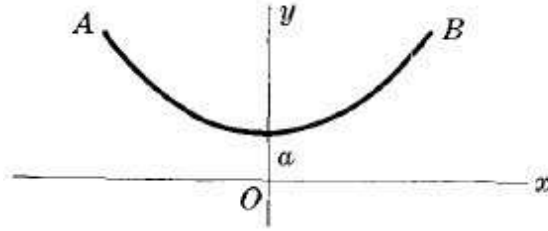
1-й способ. Функция $\arccos x$ является убывающей и положительной на своей области определения. Следовательно, функция $\frac{1}{\arccos x}$ является возрастающей, а функция $(-\frac{1}{\arccos x})$ убывающей.

2-й способ. Вычислим производную при $-1 < x < 1$:

$$y' = \frac{1}{\arccos^2 x} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) < 0.$$

Следовательно, функция является убывающей на своей области определения.

7. Вычислим первую производную: $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. Имеем: $y' > 0$ при $-1 < x < 1$, т. е. при $x \in (-1, 1)$ функция возрастает. Соответственно, $y' < 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, а значит, на каждом из этих промежутков функция убывает.

Рис. 11: Цепная линия $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($a > 0$).

8. Функция определена всюду, кроме точек $x = \pm 1$. Найдём производную $y' = \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{3\sqrt{(x-1)^4(x+1)^4}}$. Отсюда получаем, что функция убывает на интервалах $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ и возрастает на интервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}, +\infty)$.

9. Функция чётная, так как при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо тождество $y(-x) \equiv y(x)$, поэтому достаточно исследовать кривую при $x \geq 0$. Найдём производную: $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$. Опираясь на свойства гиперболического синуса, имеем: $y' \geq 0$ при $x \geq 0$, причём производная равна нулю лишь в точке $x = 0$. Следовательно, функция строго возрастает при $x \geq 0$. В силу чётности при $x < 0$ функция убывает (Рис. 11).

10. а) Функция всюду дифференцируема, найдём её производную:

$$y' = 2(x+1)e^{2x} + 2(x+1)^2e^{2x} = 2(x+1)(x+2)e^{2x}.$$

Отсюда по знаку производной определяем, что функция является возрастающей на промежутках $(-\infty, -2)$ и $(-1, +\infty)$, а убывает при $x \in (-2, -1)$.

б) Поскольку $y' = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, то несложно определить, что функция монотонно возрастает на промежутках $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$, и убывает при $x \in (-2, 2)$.

11. Найдём производную: $y' = 1 + \cos x \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Поскольку производная обращается в нуль в отдельных точках (не на промежутках!), то функция строго возрастает на всей числовой прямой.

12. Найдём производную $y' = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$. Имеем: $y' > 0$ при $0 < x < n$, следовательно, при $0 < x < n$ функция возрастает. Далее, $y' < 0$ при $n < x < +\infty$, следовательно, при $n < x < +\infty$ функция убывает.

13. Найдём производную первого порядка и определим промежутки возрастания: $f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x + \cos \ln x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}(\sin(\ln x + \frac{\pi}{4})) > 0 \Leftrightarrow \sin(\ln x + \frac{\pi}{4}) > -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < \ln x + \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, -\frac{7\pi}{12} + 2\pi n < \ln x <$

$\frac{13\pi}{12} + 2\pi n \Leftrightarrow e^{-\frac{7\pi}{12} + 2\pi n} < x < e^{\frac{13\pi}{12} + 2\pi n}$. Соответственно, интервалы убывания имеют вид $e^{\frac{13\pi}{12} + 2\pi n} < x < e^{\frac{17\pi}{12} + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

14. Функция определена всюду, кроме точек $x = 0, \pm 1$. Найдём производную $y' = \frac{4(8x^4 - 10x^2 + 5)}{3x^3(1+x)^2(1-x)^2}$. Отсюда с учётом $8x^4 - 10x^2 + 5 > 0$ (при всех допустимых x) получаем, что функция убывает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ и возрастает на интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$.

15. В силу дифференцируемости функции, достаточно показать, что в указанных интервалах $y' > 0$.

1) $x \in (0, +\infty)$; $y' = (e^{x \ln(1+\frac{1}{x})})' = e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} \cdot (\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1})$. Первый из сомножителей положителен. Покажем, что второй сомножитель также положителен. По формуле Лагранжа на отрезке $[x, x+1]$ имеем $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{\xi}[(x+1) - x] = \frac{1}{\xi}$, где $x < \xi < x+1$. Таким образом, $y' = y(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{x+1}) > 0$.

2) $x \in (-\infty, -1)$; для этих x приведённое выше доказательство «не проходит», т. к. $\ln(x+1)$ и $\ln x$ не определены. Поступим иначе: $y' = e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} \cdot (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}) = y(x) \cdot (\ln(1-\frac{1}{-x}) - \frac{1}{1-(-x)})$. Положим $t = -x$, $t \in (1, +\infty)$, тогда $y' = y(x) \cdot (\ln(1-\frac{1}{t}) - \frac{1}{1-t}) = y(x) \cdot (\ln(t-1) - \ln t - \frac{1}{1-t})$. По теореме Лагранжа на отрезке $[t-1, t]$ получаем: $\ln(t-1) - \ln t = -\frac{1}{\eta}$, где $t-1 < \eta < t$. Поэтому $y' = y(x) \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{\eta} \right) > 0$ при $t > 1$, т. е. при $x < -1$.

16. Функция является всюду дифференцируемой и её производная равна $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 48$. Производная является квадратичной функцией с положительным старшим коэффициентом, поэтому ни при каких значениях остальных коэффициентов она не может быть отрицательна (точнее, неположительна) на всей числовой оси. Поэтому в нашей задаче функция $f(x)$ ни при каких a не может убывать на всей числовой оси, и нам остаётся узнать, при каких a функция $f(x)$ является неубывающей (возрастает) на $(-\infty, +\infty)$.

Дифференцируемая функция является монотонно неубывающей на всей числовой прямой тогда и только тогда, когда её производная неотрицательна при всех $x \in \mathbb{R}$. Найдём все такие a , что неравенство $3x^2 + 6ax + 48 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + 16 \geq 0$ выполнено при любом x . Квадратное неравенство с положительным старшим коэффициентом выполнено при всех x , если дискриминант соответствующего квадратного трёхчлена всюду меньше или равен нулю, т. е. $D = 4a^2 - 64 \leq 0$. Так как производная обращается в нуль в отдельных одной-двух точках, то приходим к ответу: функция монотонно возрастает на всей числовой прямой при $a \in [-4, 4]$.

17. Докажем теперь основное гиперболическое тождество: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1$. Найдём производную функции $y = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$, определённой и дифференцируемой на всём множестве действительных чисел: $y' = 2 \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x -$

$2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x \equiv 0$. Поскольку производная тождественно равна нулю, то это доказывает постоянство функции на $\mathbb{R}$. Вычислим значение функции в какой-либо точке, например, $y(0) = 1$. Во всех остальных точках функция принимает это же постоянное значение. Тождество доказано.

18. Докажем неравенство $e^x - 1 > \ln(1 + x)$ при $x > 0$. Введём функции $\varphi(x) = e^x - 1$, $\psi(x) = \ln(1 + x)$ при $x \geq 0$. Поскольку $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ и $\varphi'(x) = e^x > \frac{1}{1+x} = \psi'(x)$ при $x > 0$, то на основании теоремы 6 получаем справедливость неравенства $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > 0$.

19. Введём три функции $\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2}$, $\psi(x) = \ln(1 + x)$, $\eta(x) = x$ при $x \geq 0$. Так как $\varphi(0) = \psi(0) = \eta(0)$ и $\varphi'(x) < \psi'(x) < \eta'(x)$ при $x > 0$ ($1 - x < \frac{1}{1+x} < 1$), то на основании теоремы 6 получаем справедливость неравенства $\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x)$ при $x > 0$. Графики постройте самостоятельно.

20. 1) Докажем, что $\sin x < x$. Так как $\sin 0 = 0$, $(\sin x)' < (x)'$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то на основании теоремы 6 имеем $\sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

2) Докажем, что $\frac{2x}{\pi} < \sin x$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$). Утверждается, что $\varphi(x)$ не имеет нулей в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$. В самом деле, если бы $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ был корнем уравнения $\varphi(x) = 0$, то, применяя теорему Ролля к функции $\varphi(x)$ на отрезках $[0, x_1]$ и $[x_1, \frac{\pi}{2}]$, мы получили бы, что $\varphi'(x)$ обращается в нуль в двух точках интервала $(0, \frac{\pi}{2})$. Но на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ уравнение $\varphi'(x) = 0$, т. е. $\cos x - \frac{2}{\pi} = 0$, имеет лишь один корень $x = \arccos \frac{2}{\pi}$. Поэтому $\varphi(x)$ сохраняет на указанном интервале вполне определённый знак. Возьмём любое $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ и определим знак $\varphi(x_0)$. В силу предыдущих рассуждений, знак $\varphi(x)$ на $(0, \frac{\pi}{2})$ совпадает со знаком $\varphi(x_0)$. Пусть, например, $x_0 = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\varphi(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{6} > 0$. Мы доказали, что $\varphi(x) > 0$ на $(0, \frac{\pi}{2})$, т. е. $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

21. Прологарифмировав неравенство по основанию e , получим равносильное неравенство $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$, откуда получаем $\frac{1}{x+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$. Обозначим $t = \frac{1}{x}$ ($t > 0$), тогда неравенство примет вид

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t.$$

Для доказательства этого двойного неравенства воспользуемся теоремой 6.

Докажем левое неравенство. Введём $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, $\psi(t) = \ln(1+t)$ и рассмотрим это неравенство при $t \geq 0$. Очевидно, $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} < \frac{1}{1+t} = \psi'(t)$ при $t > 0$. Следовательно, по теореме 6 имеем $\varphi(t) < \psi(t)$ при $t > 0$, т. е. $\frac{t}{1+t} < \ln(1+t)$ при $t > 0$.

Докажем правое неравенство. Обозначим $\varphi_1(t) = \ln(1+t)$, $\psi_1(t) = t$

и рассмотрим эти функции при $t \geq 0$. Так как $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$ и $\varphi'_1(t) = \frac{1}{1+t} < 1 = \psi'_1(t)$ при $t > 0$, то на основании теоремы 6 заключаем, что $\varphi_1(t) < \psi_1(t)$ при $t > 0$, т. е. $\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) < \frac{1}{t}$ при $t > 0$.

22. Обозначим $\varphi(x) = x^\alpha - 1$, $\psi(x) = \alpha(x - 1)$, тогда $\varphi(1) = \psi(1) = 0$, $\varphi'(x) = \alpha x^{\alpha-1} > \alpha = \psi'(x)$ при $\alpha \geq 2$, $x > 1$. Следовательно, в силу теоремы 6, заключаем, что $\varphi(x) > \psi(x)$ при $\alpha \geq 2$, $x > 1$.

23. 1-й способ. Пусть $x > 1$. Обозначим $\varphi(x) = 1 + 2\ln x$, $\psi(x) = x^2$. Заметим, что $\varphi(1) = \psi(1)$, $\varphi'(x) < \psi'(x)$ при $x > 1$. Следовательно, в силу теоремы 6, имеем $\varphi(x) < \psi(x)$ при $x > 1$. Пусть теперь $0 < x < 1$. Положим $t = \frac{1}{x}$, $t > 1$. Тогда неравенство принимает вид $1 - 2\ln t < \frac{1}{t^2}$. Обозначим $\varphi_1(t) = 1 - 2\ln t$, $\psi_1(t) = \frac{1}{t^2}$, тогда $\varphi'_1(t) = -\frac{2}{t}$, $\psi'_1(t) = -\frac{2}{t^3}$. Поскольку $\varphi_1(1) = \psi_1(1) = 1$, $\varphi'_1(t) < \psi'_1(t)$ при $t > 1$, то, в силу теоремы 6, верно неравенство $\varphi_1(t) < \psi_1(t)$ при $t > 1$, т. е. $\varphi(x) < \psi(x)$ при $0 < x < 1$. Поскольку $\varphi(1) = \psi(1)$, то $\varphi(x) \leq \psi(x)$ при $x > 0$.

2-й способ. Положим $t = x^2$. Тогда неравенство упрощается и принимает вид $1 + \ln t \leq t$. Рассмотрим функцию $f(t) = t - \ln t - 1$ при $t > 0$. Имеем $f'(t) = \frac{t-1}{t}$, следовательно, $f'(t) > 0$ при $t > 1$, $f'(t) < 0$ при $0 < t < 1$. Таким образом, функция $f(t)$ убывает на промежутке $(0, 1]$ и возрастает на луче $[1, +\infty)$. Поскольку функция $f(t)$ непрерывна, точка $t = 1$ является точкой минимума. Итак, для всех $t > 0$ справедливо неравенство $f(t) = t - \ln t - 1 \geq f(1) = 0$, т. е. $x^2 - \ln x^2 - 1 \geq 0$.

24. 1) Пусть $x \geq e$. Обозначим $\varphi(x) = \ln x$, $\psi(x) = \frac{x}{e}$. Имеем: $\varphi(e) = \psi(e) = 1$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} < \frac{1}{e} = \psi'(x)$ при $x > e$. По теореме 6 при $x > e$ выполнено неравенство $\varphi(x) < \psi(x)$.

2) Пусть $0 < x \leq e$. Введём $t = \frac{1}{x} \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, тогда неравенство примет вид $\ln \frac{1}{t} < \frac{1}{et}$. Обозначим $\varphi(t) = \ln \frac{1}{t}$, $\psi(t) = \frac{1}{et}$. Имеем при $t > \frac{1}{e}$: $\varphi'(t) = -\frac{1}{t} < -\frac{1}{et^2} = \psi'(t)$. По теореме 6 при $t > \frac{1}{e}$ выполнено неравенство $\varphi(t) < \psi(t)$, а следовательно, при $0 < x < e$ будет верно $\ln x < \frac{x}{e}$.

Положим в доказанном неравенстве $x = \pi$ пропотенцируем его по основанию e : $\ln \pi < \frac{\pi}{e}$, т. е. $e^{\ln \pi} < e^{\frac{\pi}{e}} \Leftrightarrow \pi < e^{\frac{\pi}{e}} \Leftrightarrow \pi^e < e^\pi$.

25. Обозначим $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \sin x$ и покажем, что $f(x) > 0$ при $x > 0$. Ясно, что $f(0) = 0$. Последовательно дифференцируя, находим, что $f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$, $f''(0) = 0$,

$f'''(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(x) = x - \sin x > 0$ при $x > 0$, поскольку $\sin x < x$ при $x > 0$. Следовательно, функция $f'''(x)$ возрастает на луче $(0, +\infty)$, и поэтому $f'''(x) > f'''(0) = 0$ при $x > 0$. Аналогичные рассуждения показывают, что $f''(x) > 0$, $f'(x) > 0$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$.

26. Не обязательно. *Решение.* Функция $f'(x)$ может сохранять постоянный знак на интервале, не будучи сама монотонной на нём. Например, $f(x) = x + \sin x$ монотонно возрастает на всей числовой оси (т. к. $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, причём обращение производной в нуль происходит в отдельных точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). Однако вторая производная $f''(x) = -\sin x$ меняет свой знак при переходе через точки $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, поэтому $f'(x)$ не является монотонной на всей оси.

27. Да, может. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x - \text{рациональное число из } [-1, 1], \\ -x, & \text{если } x - \text{иррациональное число из } [-1, 1], \end{cases}$$

осуществляет взаимно однозначное отображение сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[-1, 1]$ (действительно, разным значениям x отвечают разные значения y), поэтому данная функция обратима.

28. а) Пример функции, возрастающей в единственной точке $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 2x, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

б) Рассмотрим периодическую с периодом π функцию, которая на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ определяется так:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{если } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cap \mathbb{Q}, \\ 2 \operatorname{tg} x, & \text{если } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Данная функция возрастает в точках вида πn , где $n \in \mathbb{Z}$.

29. Вычислим производную в произвольной точке x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \text{ По условию, имеем оценку:}$$

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right| \leq \left| \frac{\Delta x^2}{\Delta x} \right| = |\Delta x|.$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$: $|f'(x)| \leq 0 \Leftrightarrow |f'(x)| = 0$. В силу произвольности x получаем, что f – постоянная функция.

30. а) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$), их произведение $f_1(x) \cdot f_2(x) = x$ – тоже является возрастающей функцией;

б) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) монотонные функции, но $f_1(x) \cdot f_2(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) – не является монотонной функцией.

31. Найдём производную сложной функции: $f'_x = f'_g \cdot g'_x$. Достаточно показать, что она положительна. Но это так, поскольку в силу возрастания обеих функций их производные положительны: $f'_g > 0$, $g'_x > 0$. Требование дифференцируемости функций не является необходимым, данное утверждение может быть доказано, опираясь на определение возрастающей функции.

32. Да, например функция *канторова лестница*.

33. Функция $f(x)$, определённая на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, называется *периодической*, если существует неравное нулю действительное число T (называемое *периодом*) такое, что при всех $x \in X$ точки $x-T$, x , $x+T$ одновременно принадлежат X , и при этом для любого $x \in X$ выполняется условие $f(x+T) = f(x)$. Наименьший положительный период (если он существует) называется *главным*, или *основным*, *периодом* функции.

Строго монотонная функция каждое своё значение принимает один раз, а периодическая – бесконечное число раз, поэтому никакая периодическая функция не может быть строго монотонной. И всё же периодическая функция может быть монотонной, правда, лишь в нестрогом смысле слова. Так, постоянная функция удовлетворяет определению периодической функции (хотя и не имеет основного периода) и при этом является невозрастающей (и одновременно неубывающей), т. е. монотонной функцией.

34. Например, функция Дирихле. Обоснуйте этот факт.

35. Так как функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши на отрезке $[x_0, x]$,¹ то, применив эту теорему, получим:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} \right| = \left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \right| \leq 1 \quad (x_0 < c < x),$$

откуда $|f(x) - f(x_0)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \varphi(x) - \varphi(x_0)$. Геометрически это неравенство означает, что приращение монотонно возрастающей дифференцируемой функции $\varphi(x)$ будет не меньше приращения всякой другой дифференцируемой функции $f(x)$ с меньшим или равным абсолютным значением производной.

36. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \frac{1}{2^n}, & \text{если } \frac{1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

¹**Теорема Коши.** Если: 1) $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a, b]$; 2) существуют конечные $f'(x)$ и $g'(x)$ на (a, b) ; 3) $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ при $x \in (a, b)$; 4) $g(a) \neq g(b)$, то $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, где $c \in (a, b)$.

Проверьте другой пример: если обратить канторову лестницу (горизонтальные участки при этом станут скачками), то получится функция, имеющая скачки в точках вида $\frac{m}{2^n}$, где $1 \leq m < 2^n$, которых счётное на отрезке $[0, 1]$ множество.

37. Например, $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x^3 \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

38. 1) Параметрические уравнения: $x = t, y = 1 - t, t \in \mathbb{R}$.

2) Перейдём к полярным координатам: $r \sin \varphi = 1 - r \cos \varphi$, откуда

$$r = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)}.$$

39. 1) При помощи формул $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ из исходного уравнения получаем: $(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r \cos \varphi$, или $r^2 = r \cos \varphi$. Итак, приходим к уравнению $r = \cos \varphi$.

2) Выделим полный квадрат по x : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Это уравнение окружности радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Перепишем уравнение в виде $\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1$ и положим $\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \cos t, \frac{y}{\frac{1}{2}} = \sin t$, где $t \in [0, 2\pi)$. Отсюда получаем параметрические уравнения $x = \frac{1}{2}(1 + \cos t), y = \frac{1}{2} \sin t$.

3) После этого изобразить кривую не составляет труда.

40. а) Известно, что если сумма квадратов двух чисел равна единице, то одно из чисел можно представить в виде косинуса некоторого числа t , а другое – в виде синуса того же t . Принимая t за параметр, имеем: $\frac{x}{a} = \cos t, \frac{y}{b} = \sin t$, откуда получаем известные параметрические уравнения эллипса: $x = a \cos t, y = b \sin t$. Одному «обходу» эллипса против часовой стрелки соответствует изменение параметра t от 0 до 2π .

б) Перепишем уравнение в виде $\left(\sqrt[8]{\frac{x}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt[8]{\frac{y}{b}}\right)^2 = 1$ и положим $\sqrt[8]{\frac{x}{a}} = \cos t, \sqrt[8]{\frac{y}{b}} = \sin t$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, откуда получаем параметрические уравнения кривой: $x = a \cos^8 t, y = b \sin^8 t$.

41. Например, рассмотрим параметризацию $\begin{cases} x = t - 1, \\ y = t^2 - 2t + 1, \end{cases} t \in [1, +\infty).$

При этом кривую $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) можно задать уравнениями

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos^2 t, \end{cases} t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Для доказательства достаточно исключить t из уравнений. Уравнения $x = \sin t, y = \sin^2 t$ определяют параболу $y = x^2$, заданную на сегменте $[-1, 1]$.

42. Сложив уравнения, получим $x + y = \frac{\pi}{2}$, откуда получаем прямую $y = \frac{\pi}{2} - x$, где $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

43. Поскольку $\sqrt{x} = \cos^2 x$, $\sqrt{y} = \sin^2 x$, то, складывая, получаем $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, откуда находим $y = (1 - \sqrt{x})^2$, $x \in [0, 1]$.

44. Возводя уравнения в квадрат и складывая, получаем $x^2 + y^2 = 25$.

45. Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы, то для нахождения производной воспользуемся соответствующей формулой:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3(1-t)(1+t)}{2(1-t)}.$$

Отсюда видно, что при $t = 1$ (т. е. $x = 1$) производная имеет устранимый разрыв, причём существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} = 3$. Это означает, что в этой точке сходятся две ветви кривой, имеющие общую касательную. Анализируя знак производной, находим, что $y(x)$ убывает при $t \in (-\infty, -1]$ и возрастает на участках $[-1, 1)$ и $(1, +\infty)$.

46. Положим $y = tx$ в уравнении кривой:

$$x^3 + t^3 x^3 - 3atx^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x(1+t^3) - 3at) = 0.$$

Отсюда либо $x = 0$ ($\Rightarrow y = 0$, т. е. точка $(0, 0)$ принадлежит кривой), либо

$x = \frac{3at}{1+t^3}$ (и тогда $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $t \neq -1$). Это параметрические уравнения

декартова листа. Вычислим первую производную. Так как $y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$,

$x'_t = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$, то $y'_x = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. Найдём критические точки:

$$\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = 0 & \Rightarrow x = 0, y = 0; \\ t = \sqrt[3]{2} & \Rightarrow x = a\sqrt[3]{2}, y = a\sqrt[3]{4}. \end{cases}$$

Кроме того, конечная производная не существует в точке $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ($x = a\sqrt[3]{4}$, $y = a\sqrt[3]{2}$). Получаем, что кривая возрастает при $t \in [0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}) \cup [\sqrt[3]{2}, +\infty)$ и убывает при $t \in (-\infty, 0] \cup (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}]$ (найдите эти участки на Рис. 12).

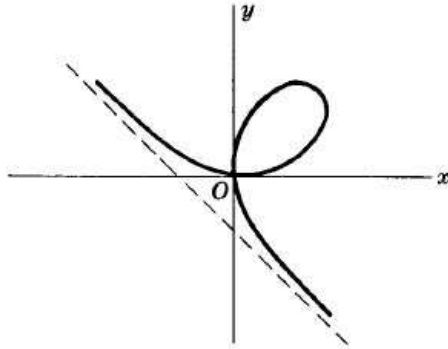
47. Для точки $A(3, \frac{\pi}{6})$: 1) $(3, -\frac{5\pi}{6})$; 2) $(3, -\frac{\pi}{6})$; 3) $(3, \frac{5\pi}{6})$.

Для точки $B(5, \frac{2\pi}{3})$: 1) $(5, -\frac{\pi}{3})$; 2) $(5, -\frac{2\pi}{3})$; 3) $(5, \frac{\pi}{3})$.

Для точки $C(2, -\frac{\pi}{6})$: 1) $(2, \frac{5\pi}{6})$; 2) $(2, \frac{\pi}{6})$; 3) $(2, -\frac{5\pi}{6})$.

Для точки $D(-2, \frac{\pi}{6})$: 1) $(2, \frac{\pi}{6})$; 2) $(2, \frac{5\pi}{6})$; 3) $(2, -\frac{\pi}{6})$.

48. Воспользуемся формулами перехода от полярных координат к декартовым (совмещённым): $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$: $A(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}) \rightarrow A(-2, 2)$, $B(7, \frac{\pi}{2}) \rightarrow B(0, 7)$, $C(3, \frac{5\pi}{4}) \rightarrow C(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$, $D(1, -\frac{\pi}{4}) \rightarrow D(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

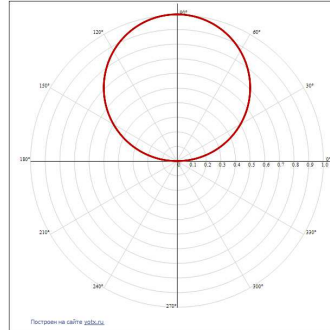
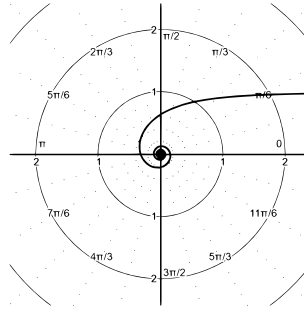
Рис. 12: Декартов лист $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

49. Область определения: $\varphi > 0$. Найдём первую производную: $r' = -\frac{1}{\varphi^2} < 0$, следовательно, функция убывает при $\varphi > 0$. При $\varphi \rightarrow +\infty$ имеем $r \rightarrow +0$ (т. е. в полюсе кривая имеет асимптотическую особую точку). Когда же $\varphi \rightarrow +0$, то $r \rightarrow +\infty$ (по мере приближения к полярной оси график удаляется к бесконечности) (Рис. 14).

50. Найдём область определения: $r = \cos \varphi \geq 0$. В силу периодичности функции с периодом 2π достаточно исследовать её на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Выясним, где на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ функция возрастает, а где — убывает. Имеем $r' = -\sin \varphi$, поэтому функция возрастает при $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ и убывает при $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Чтобы понять, какую кривую задаёт данное уравнение, рассмотрим окружность радиуса $\frac{1}{2}$. Выберем полюс O лежащим на этой окружности (в крайней левой точке), а полярную ось проведём через центр окружности (горизонтально и направо). Тогда для любой точки M окружности имеет место соотношение $r = \cos \varphi$ (объясните, почему). Это и есть полярное уравнение такой окружности. Сопоставьте найденные аналитически промежутки монотонности функции с поведением кривой. Иначе: можно было перейти в уравнении к прямоугольным координатам, тогда $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$. Кривая $r = \sin \varphi$ изображена на Рис. 13. Так как $\sin \varphi = \cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$, то кривая $r = \sin \varphi$ получается из кривой $r = \cos \varphi$ поворотом её на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении (против часовой стрелки).

51. Область определения функции задаётся неравенством $a \cos 3\varphi \geq 0$, т. е. $\varphi \in [-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}]$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом она периодична с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$. Поэтому достаточно исследовать кривую на монотонность на одном периоде, например на отрезке $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. Заметим, что функция определена лишь на части этого отрезка, а именно, на $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Вычислим производную: $r'_\varphi = -3a \sin 3\varphi$. Тогда функция возрастает там, где $r'_\varphi \geq 0$, т. е. при $\varphi \in [-\frac{\pi}{6}, 0]$, и убывает там,

Рис. 13: Кривая $r = \sin \varphi$.Рис. 14: Кривая $r = \frac{1}{\varphi}$.

где $r'_\varphi \leq 0$, т. е. при $\varphi \in [0, \frac{\pi}{6}]$. В силу периодичности находим все промежутки возрастания $\varphi \in [-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{2\pi n}{3}]$ и убывания $\varphi \in [\frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}]$, $n \in \mathbb{Z}$, функции (Рис. 15).

52. Выберем уравнение в полярных координатах как более простое. Найдём $r'_\varphi = 2a \sin \varphi$. Заметим, что кривая периодична с периодом 2π , поэтому достаточно исследовать её на монотонность на отрезке $[0, 2\pi]$. Получаем, что функция возрастает, когда $r'_\varphi \geq 0$, т. е. при $\varphi \in [0, \pi]$, и убывает при $r'_\varphi \leq 0$, т. е. при $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ (кривая изображена красным цветом на Рис. 16).

53. Выполним исследование в полярной системе координат. Функции $r(t)$ и $\varphi(t)$ дифференцируемы, для нахождения производной воспользуемся формулой: $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r'_t}{\varphi'_t} = \frac{3(1-t)(1+t)}{2(1-t)}$. Отсюда видно, что при $t = 1$ (т. е. $r = 1$) производная имеет устранимый разрыв, причём существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{dr}{d\varphi} = 3$. Это означает, что в этой точке сходятся две ветви кривой, имеющие общую касательную. Анализируя знак производной, находим, что $r(\varphi)$ убывает при $t \in (-\infty, -1]$ и возрастает на участках $[-1, 1)$ и $(1, +\infty)$.

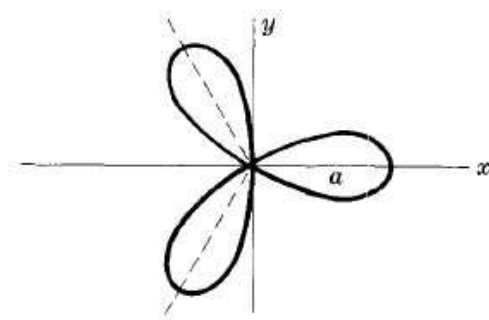
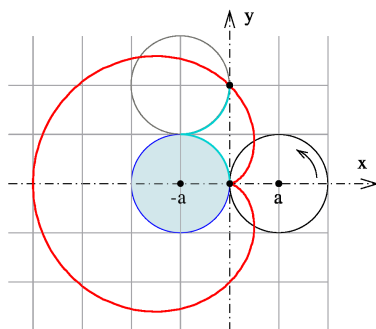
Рис. 15: Трилистник $r = a \cos 3\varphi$.

Рис. 16: Кардиоида с образующими кругами.

Замечание. Можно было исследовать кривую в прямоугольных координатах. Для этого достаточно воспользоваться формулами перехода

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x = r(t) \cos \varphi(t), \\ y = r(t) \sin \varphi(t), \end{cases}$$

и исследовать знак производной $\frac{dy}{dx}$, однако в данном случае этот способ представляется более сложным.

2 СЕМИНАР: Исследование функции на выпуклость и точки перегиба

*«Я глубоко убежден: не нужна высшая математика в школе.
Более того, высшая математика убивает креативность».*

*Министр образования и науки Андрей Фурсенко
(2004–2012), высказывание 2009 г.¹*

«Хорошая математическая подготовка позволяет глубже понимать и изучать все остальные области жизни – те же программисты (одна из безусловных профессий настоящего и будущего) без знания математики – просто [никто]. Математика – это вообще язык строгих умозаключений и описания процессов: в физике, экономике, биологии, инженерном деле все говорят на языке математики, даже уважающие себя гуманитарные науки используют математические методы».

*Кандидат физико-математических наук, МФТИ,
Егор М., 2020.*

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Одной из важных характеристик поведения функций (плоских кривых) является направление их выпуклости вверх или вниз на отдельных участках. Существуют различные подходы к определению такого понятия как выпуклость функции. Рассмотрим внешне разные, но по сути эквивалентные между собой определения.

2.1 Определения выпуклой функции и их геометрический смысл. Неравенства Йенсена

Опр. 1 (простейшее неравенство Йенсена: взвешенное, с фиксированными весами $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$, для двух точек x_1 и x_2). Функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, называется *выпуклой вниз* (в нестрогом смысле слова) на этом сегменте, если при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad (1)$$

¹А. Фурсенко, будучи министром, настаивал на исключении из учебной программы элементов высшей математики. В 2023 году А. Фурсенко является помощником президента РФ по науке и образованию.

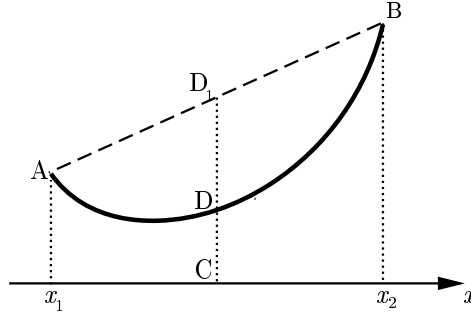


Рис. 17: Геометрический смысл неравенства Йенсена (1)

называемое *неравенством Йенсена*². При $x_1 \neq x_2$ неравенство обращается в равенство лишь в случае линейных функций f .

Геометрический смысл этого определения (Рис. 17): левая часть неравенства содержит значение функции в середине сегмента $[x_1, x_2]$ (длина отрезка CD), а правая – величину средней линии трапеции (длина отрезка CD_1). Имеем: $|CD| \leq |CD_1|$.

Соответственно, непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$, называется *выпуклой вверх*¹ на этом сегменте, если $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Одновременно с самой функцией, выпуклой вниз (вверх) называют и кривую $f(x)$ (график).

Между выпуклыми вниз и вверх функциями существует простая связь: функция f выпукла вверх тогда и только тогда, когда функция $(-f)$ выпукла вниз. Учитывая это, достаточно в дальнейшем ограничиться изучением свойств (и формулировкой определений) только для выпуклых вниз функций.

Следующее определение основано на обобщении предыдущего неравенства Йенсена.

²Йоганн Людвиг Йенсен (1859–1925) – датский математик, занимался теорией функций. Сформулировал основы теории выпуклых функций. Ещё до Йенсена это неравенство рассматривалось Гёльдером.

¹Кривая, обращённая выпуклостью вверх, иногда называется *выпуклой*, а кривая с выпуклостью вниз, соответственно, *вогнутой*.

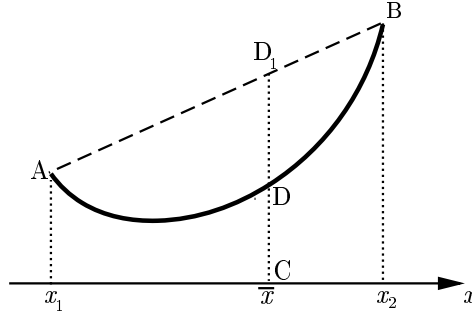


Рис. 18: Геометрический смысл неравенства (2)

Опр. 2 (неравенство Йёнсена: с весовыми коэффициентами $p_1, p_2 > 0$, нормированное $p_1 + p_2 = 1$, для 2-х точек x_1, x_2). Функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, называется *выпуклой вниз* на этом сегменте, если неравенство

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \quad (2)$$

выполняется при всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ и любых $p_1, p_2 > 0$ таких, что $p_1 + p_2 = 1$ (неравенство Йёнсена).¹

Геометрически это означает (Рис. 18), что при любом выборе упомянутых выше весовых коэффициентов p_1, p_2 точка $\bar{x} = p_1x_1 + p_2x_2$ лежит между x_1 и x_2 , и значение функции в этой точке (длина отрезка CD) не больше длины отрезка CD_1 . Если это неравенство является строгим при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$, таких что $x_1 \neq x_2$, то функцию $f(x)$ называют *строго выпуклой вниз* на отрезке $[a, b]$. Строго выпуклые функции не являются линейными ни на каком интервале, принадлежащем (a, b) .

Замечание (другие формы записи неравенства Йёнсена). Неравенство (2) можно переписать в виде

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2),$$

или $(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0$. Наконец, это условие

¹В соответствующем определении функции, выпуклой вверх, необходимо заменить знак « $\leq$ » в последнем неравенстве на знак « $\geq$ ». При $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ из неравенства (2) получаем, в частности, неравенство (1).

может быть записано и с помощью определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0.$$

В случае строгой выпуклости знаки во всех последних неравенствах должны быть строгими.

В следующем определении неравенство Йенсена допускает дальнейшее обобщение, хотя по-прежнему характеризует всё то же свойство выпуклости функции.

Опр. 3 (обобщённое неравенство Йенсена: с весовыми коэффициентами $p_1, \dots, p_n > 0$, нормированное $p_1 + \dots + p_n = 1$, для n точек $x_1, \dots, x_n$). Функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, называется *выпуклой вниз* на этом сегменте, если

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n) \quad (3)$$

при всех $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ и произвольных $p_1, \dots, p_n > 0$ таких, что $p_1 + \dots + p_n = 1$.¹

В курсе математического анализа рассматривается ещё более общее определение.

Опр. 4 (обобщённое неравенство Йенсена: с весовыми коэффициентами $p_1, \dots, p_n > 0$, ненормированное, для n точек $x_1, \dots, x_n$, на произвольном выпуклом множестве X). Функция $f(x)$, определённая (и непрерывная) на выпуклом множестве X , называется *выпуклой вниз* на этом множестве, если выполняется обобщённое неравенство Йенсена с весами:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad (4)$$

где все точки x_i произвольны и принадлежат X , а p_i ($i = \overline{1, n}$) – положительные числа, или весовые коэффициенты. Равенство достигается, только если $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, либо $f(x)$ – линейная функция.

¹При этом сумма $p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n)$, где $p_1, \dots, p_n \geq 0$ и $p_1 + \dots + p_n = 1$, называется *выпуклой комбинацией* чисел $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Выпуклая комбинация двух точек лежит на отрезке между точками. Множество $P \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если оно содержит все выпуклые комбинации своих точек (Рис. 19). *Выпуклой оболочкой* $\text{Conv}(P)$ заданного (не обязательно выпуклого) множества точек P называется множество всех выпуклых комбинаций этих точек.

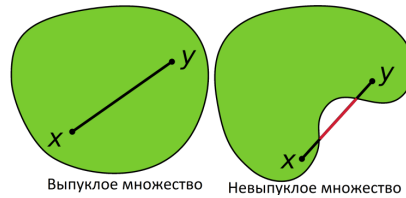


Рис. 19: Примеры выпуклого и невыпуклого множеств

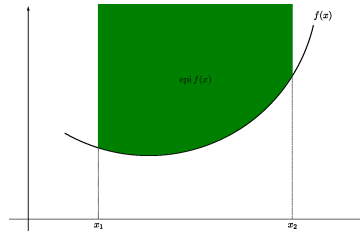


Рис. 20: Иллюстрация к Опр. 6

Очередные два определения выпуклой функции носят чисто геометрический характер.

Опр. 5 (через дугу кривой и хорду, которая её стягивает). Функция $f(x)$, определённая и непрерывная на сегменте $[a, b]$, называется *выпуклой вниз (вверх)* на этом сегменте, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ дуга AB кривой, где $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, лежит не выше (не ниже) стягивающей её хорды AB (Рис. 18).

В следующем определении нам понадобятся понятия надграфика и подграфика функции.

Надграфиком (эпиграфом) функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, называется множество

$$\text{epi } f \equiv \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}.$$

Соответственно, *подграфиком* (гипографом) называется множество

$$\text{hyp } f \equiv \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid y \leq f(x)\}.$$

Опр. 6 (через эпиграф и гипограф). Функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, называется *выпуклой вниз (вверх)* на этом сегменте, если её надграфик (подграфик) на этом отрезке является выпуклым множеством (Рис. 20).¹

¹Проще говоря, множество в $\mathbb{R}^n$ *выпукло*, если отрезок, соединяющий две любые его точки, целиком принадлежит данному множеству.

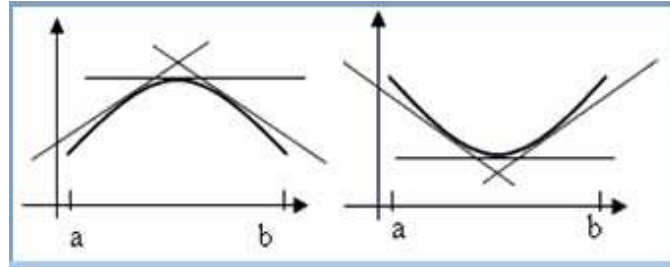


Рис. 21: Иллюстрация к Опр. 7

Рассмотрим ещё одно определение выпуклой функции, которое дополнительно требует от неё дифференцируемости на интервале (a, b) .

Опр. 7 (для дифференцируемых функций: через касательную к кривой в произвольной точке). Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемая на интервале (a, b) , называется *выпуклой вниз* на $[a, b]$, если график этой функции расположен не ниже касательной, проведённой в любой точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in (a, b).$$

В случае строгой выпуклости вниз все точки графика, за исключением самой точки касания, лежат строго выше касательной (Рис. 21).

Определения 1–7 эквивалентны.

Сформулируем, наконец, общий физико-геометрический смысл неравенств Йенсена и других определений (приведённых выше и определяющих одно и то же понятие) – это утверждение о том, что *центр масс точек графика выпуклой вниз функции лежит в надграфике, а выпуклой вверх – в подграфике*.

2.2 Свойства выпуклых функций

«Студент – это ещё ничто, из которого может выйти всё».

Шандор Петёфи (1823–1849) – национальный поэт Венгрии, революционный демократ, один из руководителей Революции 1848–1849 годов в Венгрии.

Свойства выпуклых функций подробно изучаются в математическом анализе в разделе *выпуклого анализа*. Мы остановимся здесь лишь на самых важных свойствах такого рода функций.

1. (*О непрерывности и дифференцируемости выпуклой функции*). Функция $f(x)$, выпуклая на интервале (a, b) , непрерывна на этом интервале, дифференцируема на нём всюду, за исключением не более чем счётного множества точек и дважды дифференцируема почти всюду. Если функция выпукла и дифференцируема на интервале (a, b) , то она непрерывно дифференцируема на нём.

2. (*О монотонности производной выпуклой функции*). Для дифференцируемой функции $f(x)$ неравенство Йенсена эквивалентно тому, что $f'(x)$ есть монотонная функция (соответственно, неубывающая или невозрастающая). При этом строгому возрастанию (убыванию) $f'(x)$ соответствует строгая выпуклость вниз (вверх).

3. (*Об одновременной выпуклости вверх и вниз*). Любая линейная функция $y = ax + b$ ($x \in \mathbb{R}$) одновременно выпукла и вверх, и вниз в нестрогом смысле, причём все точки являются точками перегиба (о точках перегиба см. далее).

Следующие три свойства отражают арифметические операции над выпуклыми функциями.

4. (*Об умножении на отрицательную константу*). Если $f(x)$ выпукла вверх на $[a, b]$, то $(-f(x))$ выпукла вниз на этом отрезке, и наоборот. Вообще, умножение функции на положительное число сохраняет её направление выпуклости, в то время как умножение на отрицательную константу меняет направление выпуклости на противоположное.

Пример 35. Функция $f(x) = x^2$ выпукла вниз при $x \in \mathbb{R}$, соответственно, функция $g(x) = -x^2$ выпукла вверх на всей числовой прямой. $\square$

5. (*О сумме выпуклых функций*). Сумма двух (конечного числа) одинаково выпуклых функций также является функцией с тем же направлением выпуклости.

6. (*О произведении выпуклых функций*). Произведение двух одинаково выпуклых функций не обязательно является выпуклой функцией с тем же направлением выпуклости.

Пример 36. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ выпукла вверх при $x \geq 0$, но её квадрат $f^2(x) = \sqrt[3]{x^4}$ имеет выпуклость, направленную вниз. $\square$

7. (*О выпуклости сложной функции*). Если $f(g)$ – выпуклая вверх и возрастающая функция, $g(x)$ также выпукла вверх, то сложная функция $f(g(x))$ является выпуклой вверх.

Пример 37. Функция $f(x) = \ln \ln x$ выпукла вверх при $x \geq 1$. $\square$

8. (*О достижении выпуклой функцией наибольшего (наименьшего) значений на границе сегмента*). Выпуклая вниз (вверх) на сегменте $[a, b]$ функция,

отличная от постоянной, не может достигать своего наибольшего (наименьшего) значения внутри этого промежутка.

9. (О выпуклости обратной функции). Если функция f непрерывна и монотонно возрастает на сегменте $[a, b]$, то выпуклость обратной ей функции f^{-1} на сегменте $[f(a), f(b)]$ противоположна выпуклости данной функции. Если же f монотонно убывает на $[a, b]$, то обратная ей функция f^{-1} имеет ту же выпуклость на $[f(b), f(a)]$.

В частности, если f и f^{-1} есть однозначные взаимно обратные функции (каждая – на своём промежутке), то одновременно:

- 1) f – выпукла вниз и возрастает, f^{-1} – выпукла вверх и возрастает;
- 2) f – выпукла вниз и убывает, f^{-1} – выпукла вниз и убывает;
- 3) f – выпукла вверх и убывает, f^{-1} – выпукла вверх и убывает.¹

Пример 38. Функция $f(x) = \ln x$ возрастает и выпукла вверх при $x > 0$, поэтому обратная к ней функция $f^{-1}(x) = e^x$ выпукла вниз при $x \in \mathbb{R}$. С другой стороны, функция $f(x) = -\ln x$ убывает и выпукла вниз при $x > 0$, и обратная к ней функция $f^{-1}(x) = e^{-x}$ также выпукла вниз. $\square$

2.3 Достаточные условия выпуклости функций, имеющих вторую производную. Критерий строгой выпуклости

*«Дорогу осилит идущий,
а математику – думающий».*

Обратимся к условиям выпуклости на заданном промежутке функций, имеющих на нём вторую производную.

Теорема 1 (*достаточные условия нестрогой выпуклости функции, имеющей на интервале вторую производную*). Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) конечную или бесконечную вторую производную. Тогда:

- 1) если $f''(x) \geq 0$ при всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b) ;
- 2) если $f''(x) \leq 0$ при всех $x \in (a, b)$, то $f(x)$ выпукла вверх на интервале (a, b) .

Замечание. При этом строгой положительности второй производной $f''(x) > 0$ отвечает строгая выпуклость функции вниз.

Пример 39. Функция $f(x) = x^2$ строго выпукла вниз при $x \in \mathbb{R}$, так как её вторая производная $f''(x) = 2$ положительна на всём множестве действительных чисел. $\square$

¹Одним из обоснований последнего свойства является симметрия графиков взаимно обратных функций относительно прямой $y = x$.

Пример 40. Функция $y = \sqrt[3]{x^4}$ выпукла вниз на $\mathbb{R}$, так как её вторая производная $f''(x) = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}} > 0$ при всех $x \neq 0$. В точке $x = 0$ вторая производная существует и равна $+\infty$. Условия теоремы 1 выполняются. $\square$

Пример 41. Исследовать выпуклость степенной функции $y = x^a$ на луче $(0, +\infty)$.

Решение. Если $a = 0$ или $a = 1$, то функция является линейной и выпукла одновременно вниз и вверх в нестрогом смысле слова. При остальных значениях a найдём вторую производную и исследуем её знак: $f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$. Отсюда при $a < 0$ или $a > 1$ имеем $f''(x) > 0$ и функция выпукла вниз на луче $(0, +\infty)$, а при $a \in (0, 1)$ выполнено неравенство $f''(x) < 0$ и функция выпукла вверх при $x \in (0, +\infty)$. $\square$

Теорема 2 (*критерий строгой выпуклости вниз функции, имеющей на интервале вторую производную*). Для того чтобы имеющая на интервале (a, b) конечную или бесконечную вторую производную функция $f(x)$ была строго выпукла вниз на нём, необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) $f''(x) \geq 0$ в любой точке $x \in (a, b)$;
- 2) $f''(x)$ не обращалась в нуль ни на каком интервале $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.¹

Аналогичная теорема формулируется и для строго выпуклых вверх функций.

Пример 42. Функция $y = x^4$ строго выпукла вниз на $(-1, 1)$, так как её вторая производная равна нулю в единственной точке $x = 0$: $f''(0) = 0$. $\square$

Пример 43. Функция $y = \sqrt[3]{x^4}$ строго выпукла вниз на $\mathbb{R}$, так как её вторая производная $f''(x) = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}} > 0$ при всех $x \neq 0$. В точке $x = 0$ вторая производная существует и равна $+\infty$. Условия теоремы 2 выполняются. $\square$

2.4 Точка перегиба и достаточные условия её существования

«– Будучи студентом Гнесинки, я шёл по столовой с подносом и говорил:
„Расступись, звезда идёт!“»

Филипп Бедросович Киркóров (род. в 1967) –
советский и российский эстрадный певец, актёр,
композитор, музыкальный продюсер; народный
артист РФ, народный артист Украины,
народный артист Молдавии.

При построении графиков функций $y = f(x)$ определённый интерес пред-

¹Т. е. вторая производная строго выпуклой вниз функции может обращаться в нуль в отдельных точках, но не на сплошном интервале!

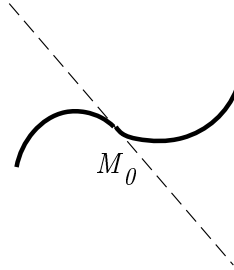


Рис. 22: Точка перегиба

ставляют точки, в которых выпуклая кривая меняет текущее направление выпуклости на противоположное. Это так называемые точки перегиба кривой. Приведём определение.

Опр. 8 (*точки перегиба*). Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика функции $f(x)$, если: 1) в этой точке график имеет касательную, 2) справа и слева от точки x_0 функция имеет разные направления выпуклости.²

Иначе: точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика функции $f(x)$, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , что график функции расположен по разные стороны от касательной слева и справа от точки M_0 (Рис. 22).

Пример 44. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$ имеет бесконечную производную, что означает, что касательная совпадает с осью Oy . Вторая производная $f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ в точке $(0, 0)$ не существует, а справа и слева от $x = 0$ имеет разные знаки. Так как оба условия в определении точки перегиба выполняются, то график функции имеет перегиб в точке $(0, 0)$. $\square$

Замечание. Помимо точек перегиба существуют отчасти похожие на них точки излома графика функции. *Точка излома*, или *угловая точка*, – это особая точка кривой, обладающая тем свойством, что ветви кривой, соединяющиеся в этой точке, имеют в ней различные односторонние касательные (Рис. 23). Точнее, функция $f(x)$ имеет точку излома $M_0(x_0, y_0)$, если она имеет в точке x_0 правую и левую производные, которые различны между собой:

$$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0),$$

²Второе условие означает, что точка перегиба отделяет участок кривой, где функция $f(x)$ (строго) выпукла вниз, от участка, где эта функция (строго) выпукла вверх.

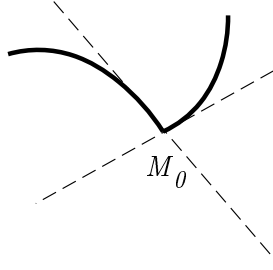


Рис. 23: Точка излома (нет перегиба)

и хотя бы одна из них конечна (отлична от $\pm\infty$). Можно сказать, что точкой излома функции $y = f(x)$ является критическая точка первого рода, в которой производная функции терпит разрыв (за исключением случая бесконечных односторонних производных одного знака) из-за того, что односторонние производные не совпадают. Точка излома нередко является точкой локального экстремума – в том случае, если производные слева и справа от неё имеют разный знак.

Точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или не существует, называются *критическими точками 2-го рода*.

Теорема 3 (*достаточные условия точки перегиба*). Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0 , причём $f''(x_0) = 0$ и $f''(x)$ меняет знак при переходе через эту точку, то $M_0(x_0, f(x_0))$ является для графика функции $f(x)$ точкой перегиба.

Пример 45. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. В точках $(\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, вторая производная обращается в нуль и меняет знак при переходе через эти точки. Поэтому указанные точки являются точками перегиба синусоиды. $\square$

Замечание. Для дважды дифференцируемых функций условие $f''(x_0) = 0$ является необходимым, но не достаточным для того, чтобы $f(x)$ имела в точке x_0 перегиб.

Пример 46. Рассмотрим функцию $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12x^2 = 0$ при $x = 0$, однако точка $(0, 0)$ не является точкой перегиба. $\square$

Теорема 3' (*достаточные условия точки перегиба*). Если в точке x_0 , являющейся критической точкой 2-го рода, функция $f(x)$ имеет конечную или бесконечную первую производную, а $f''(x)$ меняет знак при переходе через эту точку, то $M_0(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Пример 47. Функция $y = x^{\frac{5}{3}}$ ($\Rightarrow y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$ при $x \neq 0$) по теореме 3' имеет перегиб в точке $(0, 0)$. $\square$

Теорема 4 (*достаточные условия точки перегиба с привлечением производных высших порядков*). Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 ($n \geq 3$), причём $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, но $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то если n – нечётно, то в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ есть перегиб, а если n – чётно, то перегиба нет.

Пример 48. Применим теорему 4 к функции $f(x) = x^4$. В точке $x = 0$ имеем: $f''(0) = f'''(0) = 0$, однако $f^{(4)}(0) \neq 0$. Так как порядок производной 4 – число чётное, то, следовательно, точка $(0, 0)$ не является точкой перегиба. А вот функция $f(x) = x^5$ уже будет иметь в начале координат перегиб. $\square$

Если функция задана разными аналитическими выражениями с разных сторон от точки. Рассмотрим ситуацию, когда функция задана разными аналитическими выражениями слева и справа от фиксированной точки. В этом случае можно воспользоваться следующей теоремой или её аналогами.

Теорема 5 (*достаточные условия выпуклости вниз (вверх) с учётом разной монотонности при сохранении выпуклости функции*). Если непрерывная функция f монотонно убывает и выпукла вниз (хотя бы в нестрогом смысле) на сегменте $[a, b]$, при этом монотонно возрастает и выпукла вниз на сегменте $[b, c]$, то f выпукла вниз на их объединении – сегменте $[a, c]$. Если же непрерывная функция f монотонно возрастает и выпукла вверх на $[a, b]$, и при этом убывает и выпукла вверх на $[b, c]$, то f выпукла вверх на $[a, c]$.

Пример 49. Является ли функция

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & \text{если } x \in [-1, 0]; \\ 3x^4, & \text{если } x \in [0, 1]; \end{cases}$$

выпуклой вниз на сегменте $[-1, 1]$?

Решение. Заметим, что слева от точки 0 (на сегменте $[-1, 0]$) функция убывает и выпукла вниз, а справа от этой точки (на сегменте $[0, 1]$) она возрастает и тоже выпукла вниз. По теореме 5 функция (строго) выпукла вниз на сегменте $[-1, 1]$. $\square$

Замечание. Если непрерывная функция f монотонно возрастает и выпукла вниз на $[a, b]$, монотонно убывает и выпукла вниз на $[b, c]$,¹ (или монотонно убывает и выпукла вверх на $[a, b]$, монотонно возрастает и выпукла вверх на $[b, c]$), то f не является выпуклой на сегменте $[a, c]$.

Возможны и другие ситуации, когда функция, заданная разными аналитическими выражениями слева и справа от некоторой точки, сохраняет выпук-

¹Монотонность хотя бы с одной стороны строгая.

лость на всём промежутке, содержащем внутри себя эту точку (в списке задач в конце семинара есть соответствующая задача).

2.5 Доказательство известных неравенств с помощью неравенства Йенсена. Интегральный аналог неравенства Йенсена

«Читать всего совсем не нужно; нужно читать то, что отвечает на возникшие в душе вопросы».

Лев Толстой (1828–1910) – один из наиболее известных русских писателей и мыслителей, один из величайших писателей-романистов мира. Участник обороны Севастополя во времена Крымской войны 1853–1855 гг.

При соответствующем подборе функции $f(x)$ и весов p_i в неравенствах Йенсена можно получить многие классические неравенства. Например, если в неравенстве Йенсена для выпуклых вниз функций

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$$

положить $f(x) = -\ln x$, $x > 0$, то получается неравенство между взвешенным средним геометрическим и взвешенным средним арифметическим для двух чисел:

$$-\ln(p_1x_1 + p_2x_2) \leq -p_1\ln(x_1) - p_2\ln(x_2),$$

$$p_1\ln(x_1) + p_2\ln(x_2) \leq \ln(p_1x_1 + p_2x_2),$$

$$x_1^{p_1}x_2^{p_2} \leq p_1x_1 + p_2x_2,$$

которое при $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, в свою очередь, превращается в классическое неравенство Коши:

$$\sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Приведём ниже вывод при помощи неравенства Йенсена наиболее известных неравенств в общем виде.

1. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (неравенство Коши) для n положительных чисел $x_1, \dots, x_n$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Докажем, что неравенство Коши является следствием неравенства Йенсена. Прологарифмируем неравенство Коши:

$$\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln x_i.$$

Функция $f(x) = \ln x$ ($x > 0$) выпукла вверх, так как производная $f''(x) = -1/x^2 < 0$, а полученное неравенство – это неравенство Йенсена (3) для функции $f(x)$ с весами $p_1 = \dots = p_n = 1/n$. $\square$

2. Неравенство между взвешенным средним арифметическим и средним геометрическим (обобщение неравенства Коши).¹

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{p_i},$$

где $x_i, p_i > 0$ ($i = \overline{1, n}$), $p_1 + \dots + p_n = 1$.

Доказательство. Так же, как и в предыдущем случае, прологарифмируем обе части неравенства:

$$\ln \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i \right) \geq \sum_{i=1}^n p_i \ln x_i.$$

Это неравенство Йенсена для выпуклой вверх функции $f(x) = \ln x$. $\square$

Пример 50. (Средняя скорость тела как пример среднего взвешенного арифметического). Если тело в течение промежутка времени t_1 движется со скоростью v_1 , затем в течение следующего промежутка времени t_2 — со скоростью v_2 и так далее до последнего промежутка времени t_n , в течение которого оно движется со скоростью v_n , то средняя скорость движения тела за суммарный промежуток времени $(t_1 + t_2 + \dots + t_n)$ будет равна взвешенному среднему арифметическому скоростей $v_1, \dots, v_n$ с набором весов $t_1, \dots, t_n$:

$$v_{cp.} = \frac{t_1 v_1 + \dots + t_n v_n}{t_1 + \dots + t_n}. \square$$

3. Неравенство Коши–Буняковского в случае, когда $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1$, т. е.

$$(x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + \dots + x_n \cdot 1)^2 \leq (1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

¹Среднее арифметическое взвешенное — математическое понятие, обобщающее среднее арифметическое. Среднее арифметическое взвешенное набора чисел $x_1, \dots, x_n$ с весами $p_1, \dots, p_n$ определяется как

$$\frac{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n}{p_1 + \dots + p_n}.$$

При этом сумма весов не может быть равна 0, но могут быть некоторые (не все) веса, равные 0. Если все веса p_i равны между собой, получается обычное среднее арифметическое. Существуют также взвешенные версии среднего геометрического и среднего гармонического, а также их обобщения — среднего степенного.

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Доказательство. Так как функция $y = x^2$ выпукла вниз, то для неё выполняется неравенство Йенсена с $p_1 = \dots = p_n = 1/n$:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}.$$

Умножив теперь обе части на n^2 , получим неравенство Коши–Буняковского. А если извлечь из полученного неравенства квадратный корень, то мы получим знакомое неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным. $\square$

4. Неравенство между средним гармоническим и средним геометрическим.

Доказательство. Положим в неравенстве Йенсена $f(x) = x \ln x$ (выпуклая вверх функция). Тогда

$$f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \ln\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i x_i \ln x_i.$$

Полагая $p_i = \frac{1}{x_i} / \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$ и потенцируя, получаем $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{1/n}$ (среднее гармоническое не превосходит среднего геометрического). $\square$

5. Неравенство между средним гармоническим и средним арифметическим.

Доказательство. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) (выпуклая вниз функция). Имеем

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i x_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{x_i}.$$

В частности, при $p_i = 1/n$ отсюда получаем, что среднее гармоническое не превосходит среднего арифметического:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}. \quad \square$$

6. Неравенства Бернулли

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \quad (x > -1, \alpha > 1);$$

$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x \quad (x > -1, 0 < \alpha < 1).$$

Доказательство. Логарифмируя обе части первого неравенства, получаем

$$\alpha \ln(1+x) \geq \ln(1+\alpha x) \Leftrightarrow \ln(1+x) \geq \frac{1}{\alpha} \ln(1+\alpha x).$$

Используя выпуклость вверх функции $f(x) = \ln x$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha x) &= \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha x) + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \ln 1 \leq \ln \left(\frac{1}{\alpha}(1 + \alpha x) + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \cdot 1 \right) = \\ &= \ln(1 + x), \end{aligned}$$

что доказывает первое из неравенств Бернулли.

Записывая второе неравенство в виде $\alpha \ln(1 + x) \leq \ln(1 + \alpha x)$, аналогично предыдущему получаем

$$\alpha \ln(1 + x) = \alpha \ln(1 + x) + (1 - \alpha) \ln 1 \leq \ln(\alpha(1 + x) + (1 - \alpha) \cdot 1) = \ln(1 + \alpha x). \quad \square$$

7. Неравенства Гёльдера.

Доказательство. 1) Пусть $f(x) = x^p$, $x \geq 0$, $p > 1$. Поскольку такая функция выпукла вниз, имеем

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right)^p \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^p.$$

Полагая здесь $q = \frac{p}{p-1}$, $\alpha_i = b_i^q \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{-1}$, $x_i = a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} \sum_{i=1}^n b_i^q$, получаем неравенство Гёльдера

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ и } p > 1.$$

2) При $p < 1$ функция $f(x) = x^p$ выпукла вверх, поэтому аналогичными рассуждениями можно получить и другое неравенство Гёльдера. $\square$

Интегральный аналог неравенства Йенсена.¹ Неравенство Йенсена имеет свой интегральный аналог. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана интегрируемая функция $\varphi(x)$, значения которой содержатся в X , и положительная функция $p(x)$. Теперь x_i будут означать точки разбиения отрезка $[a, b]$. Прежние x_i в предыдущем (числовом) неравенстве Йенсена заменим на $\varphi(x_i)$, а p_i положим равными $p(x_i)\Delta x_i$. Тогда, переходя от интегральных сумм к интегралам, получим интегральное неравенство Йенсена для выпуклой вниз функции f :

$$f \left(\frac{\int_a^b p(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} \right) \leq \frac{\int_a^b p(x) f(\varphi(x)) dx}{\int_a^b p(x) dx},$$

или, без весовой функции ($\int_a^b p(x) dx = 1$),

¹Последние два пункта сейчас можно пропустить и вернуться к ним после изучения темы «Определённый интеграл Римана».

$$f\left(\int_a^b \varphi(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f((b-a)\varphi(x))dx.$$

Оценка определённого интеграла от выпуклой функции. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ выполняется $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (выпукла вниз), то справедливо неравенство ([25], с. 94)

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a). \quad (5)$$

Можно выписать аналогичное неравенство для функций, выпуклых вверх.

Пример 51. Оценить интеграл $\int_0^2 e^x dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция выпукла вниз, то воспользуемся неравенством (5):

$$2e \leq \int_0^2 e^x dx \leq 1 + e^2. \quad \square$$

2.6 Задачи для самостоятельного решения

№54. Привести пример двух выпуклых вверх функций таких, что их произведение не является выпуклой вверх функцией.

№55. Верно ли, что если функция f выпукла вниз на каждом из двух смежных сегментов $[a, b]$ и $[b, c]$, то она выпукла вниз и на их объединении – сегменте $[a, c]$?

№56. [5, Пример Т4.5] Пусть функция f выпукла вниз на (a, b) . Доказать, что f непрерывна на (a, b) .

№57. [8, № 1303] Найти промежутки выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба графика функции

$$y = x + \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

№58. Найти промежутки выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба функций:

$$\text{а) } y = \frac{1 + \ln x}{x}; \quad \text{б) } y = (x - 5)^{\frac{5}{3}} + 2.$$

№59. [8, № 1306] Найти промежутки выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба графика функции

$$y = x \sin(\ln x) \quad (x > 0).$$

№60. [8, № 1307] Найти промежутки выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба графика функции

$$y = x^x \quad (x > 0).$$

№61. [8, № 1308] Показать, что кривая имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой:

$$y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

№62. [8, № 1309] При каком выборе параметра h кривая вероятности

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (h > 0)$$

имеет точки перегиба $x = \pm \sigma$?

№63. [8, № 1310] Исследовать направления выпуклости циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0).$$

№64. [8, № 1312] Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз (вверх) на интервале (a, b) , если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала и произвольных чисел p_1 и p_2 ($p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$) имеет место неравенство

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$$

(или, соответственно, противоположное неравенство).

Доказать, что:

1) $f(x)$ выпукла вниз на (a, b) , если $f''(x) \geq 0$ при $a < x < b$;

2) $f(x)$ выпукла вверх на (a, b) , если $f''(x) \leq 0$ при $a < x < b$.

№65. [8, № 1313] Показать, что функции x^n ($n > 1$), e^x , $x \ln x$ выпуклы вниз на интервале $(0, +\infty)$, а функции x^n ($0 < n < 1$), $\ln x$ выпуклы вверх на этом интервале.

№66. Сохраняет ли функция одно и то же направление выпуклости на всей числовой прямой

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} 2x, & \text{если } x < 0; \\ 2x + \frac{\pi}{2}, & \text{если } x \geq 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} 2x, & \text{если } x < 0; \\ -2x + \frac{\pi}{2}, & \text{если } x \geq 0? \end{cases}$$

№67. Определить, является ли функция дифференцируемой в точке $x = 0$, является ли она дважды дифференцируемой в этой точке, а также является ли она выпуклой на интервале $(-1, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, & \text{если } x < 0; \\ x^2, & \text{если } x \geq 0? \end{cases}$$

№68. [13, с. 74] Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $(1, 5)$ и

$$f(3) < \frac{f(2) + f(4)}{2}.$$

Доказать, что найдётся точка $c \in (1, 5)$ такая, что $f''(c) > 0$.

№69. Пусть f и g – дважды дифференцируемые функции. Доказать, что если f – выпукла вниз и возрастает, а g – выпукла вниз, то сложная функция $y = f(g(x))$ – выпукла вниз.

№70. Доказать, что если функция f непрерывна и монотонно возрастает на сегменте $[a, b]$, то обратная ей функция f^{-1} имеет на соответствующем сегменте $[f(a), f(b)]$ противоположное направление выпуклости. Если же функция f монотонно убывает на $[a, b]$, то обратная функция f^{-1} сохраняет выпуклость данной на $[f(b), f(a)]$.

№71. При каких значениях параметра a кривая $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ выпукла вниз на всей числовой прямой?

№72. При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если } x < 0; \\ ax, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

выпукла вниз на всём множестве $\mathbb{R}$?

№73. При каких значениях параметров a и b точка $A(1, 3)$ является точкой перегиба кривой $y = ax^3 + bx^2$?

№74. При каких значениях параметров a и b точка $B(-2, 0)$ является точкой перегиба кривой $y = ax^3 + bx^2 + 5x - 6$?

№75. При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{если } x < 0; \\ ax(x-1), & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

имеет перегиб в точке $(0, 0)$?

№76. Оценить интеграл $\int_0^1 e^{x^2+1} dx$ с помощью неравенства (5), предварительно обосновав выпуклость функции.

С помощью неравенств Йенсена доказать неравенства:

№77. [8, № 1314(а)] Доказать неравенство:

$$\frac{x^n + y^n}{2} > \left(\frac{x+y}{2} \right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1).$$

№78. [8, № 1314(б,в)] Доказать неравенства ($x \neq y$):

$$\text{а) } \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}; \quad \text{б) } x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \quad (x, y > 0).$$

№79. Опираясь на неравенство Йенсена $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ (знак может быть и противоположный), придумать неравенство для какой-либо выпуклой функции, верное при всех допустимых x и y .

№80. Доказать справедливость неравенства

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

где α, β, γ – внутренние углы некоторого треугольника.

№81. Доказать неравенство (при $0 \leq x_i \leq \pi$, $i = \overline{1, n}$):

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n}{n} \leq \sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

№82. Доказать неравенство Несбитта

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \frac{3}{2}.$$

Указание: ввести функцию $f(t) = \frac{t}{S-t}$, где $S = x_1 + x_2 + x_3$, и показать, что она выпукла вниз на $[0, S)$. Далее использовать неравенство Йенсена (4).

2.7 Ответы и решения

54. Например, $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = -e^x$.

55. Вообще говоря, неверно. Рассмотрите пример: $f(x) = (x - 1)^2$, если $x \in [0, 1]$, и $f(x) = (x + 1)^2$, если $x \in [-1, 0]$. Очевидно, надграфик не является выпуклым множеством.

56. По условию, $\forall \lambda \in (0, 1)$ и $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ имеем неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Пусть $x_0 \in (a, b)$ и $0 < h < h_0$. Покажем, что f непрерывна в точке x_0 . Положим $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + h_0$. Если $x = x_0 + h = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, то $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{h_0 - h}{h_0} \in (0, 1)$, и тогда заданное условие даёт неравенство

$$f(x_0 + h) \leq \frac{h_0 - h}{h_0} f(x_0) + \frac{h}{h_0} f(x_0 + h_0),$$

откуда

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq \frac{f(x_0 + h_0) - f(x_0)}{h_0} h = Ah.$$

Аналогично, полагая $x_1 = x_0 - h_0$, $x_2 = x_0$, $x = x_0 - h = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, где $\lambda = h/h_0 \in (0, 1)$, получим неравенство

$$f(x_0) - f(x_0 - h) \geq \frac{f(x_0) - f(x_0 - h_0)}{h_0} h = Bh.$$

Кроме того, применяя неравенство из условия задачи для $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$ и $\lambda = \frac{1}{2}$, имеем $f(x_0) \leq \frac{1}{2}(f(x_0 + h) + f(x_0 - h))$, или $f(x_0) - f(x_0 - h) \leq f(x_0 + h) - f(x_0)$. Итак, при всех $h \in (0, h_0)$ выполнены неравенства

$$Bh \leq f(x_0) - f(x_0 - h) \leq f(x_0 + h) - f(x_0) \leq Ah,$$

откуда при $h \rightarrow 0+$ получаем $f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$ и $f(x_0 - h) \rightarrow f(x_0)$, следовательно, функция f непрерывна в точке x_0 .

57. Функция дважды дифференцируема на всей числовой прямой. Найдём вторую производную: $y' = 1 + \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x$. Согласно теореме 2, функция (строго) выпукла вниз при условии $y'' \geq 0 \Leftrightarrow -\sin x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$, и (строго) выпукла вверх при условии $y'' \leq 0 \Leftrightarrow -\sin x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$. В точках $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, вторая производная y'' обращается в нуль и меняет знак, поэтому точки вида $(\pi n, \pi n)$ являются точками перегиба.

58. а) Функция определена при $x > 0$. Найдём вторую производную:

$$y' = -\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{x^4} = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}.$$

Тогда функция строго выпукла вниз при $f''(x) > 0$, т. е. при $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$, и строго выпукла вверх при $x \in (0, \sqrt{e})$. Точка $M(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}})$ – точка перегиба.

б) $D(y) = \mathbb{R}$, $y' = \frac{5}{3}(x-5)^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}} \neq 0$ и не существует при $x = 5$.

Так как при достаточно малом $h > 0$ имеем $y''(5-h) < 0$, $y''(5+h) > 0$, то $M(5, 2)$ – точка перегиба.

59. Найдём вторую производную:

$$y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x) \Rightarrow y'' = \frac{1}{x}(\cos(\ln x) - \sin(\ln x)) = \frac{\sqrt{2}}{x} \cos\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда $y'' > 0$ при $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < \ln x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда функция выпукла вниз при

$$e^{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n} < x < e^{\frac{\pi}{4} + 2\pi n}.$$

Далее, так как $y'' < 0$ при $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < \ln x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то функция выпукла вверх при

$$e^{\frac{\pi}{4} + 2\pi n} < x < e^{\frac{5\pi}{4} + 2\pi n}.$$

При этом точки вида $\left(e^{\frac{\pi}{4} + \pi n}, \frac{(-1)^n e^{\frac{\pi}{4} + \pi n}}{\sqrt{2}}\right)$ являются точками перегиба графика функции.

60. При $x > 0$ имеем $y'' = x^x((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}) > 0$, откуда следует, что кривая выпукла вниз при всех $x > 0$.

61. Точки перегиба $A(-2 - \sqrt{3}, \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}))$, $B(-2 + \sqrt{3}, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}))$, $C(1, 1)$.

Решение. 1) Найдём точки перегиба: $y' = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow$

$$y'' = \dots = \frac{2(x^2 + 1)(x - 1)(x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^4}.$$

Приравнивая вторую производную к нулю, находим три точки

$$x = -2 - \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}), \text{ т. е. } A(-2 - \sqrt{3}, \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}));$$

$$x = -2 + \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}), \text{ т. е. } B(-2 + \sqrt{3}, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}));$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1, \text{ т. е. } C(1, 1).$$

Так как в этих точках производная y'' меняет знак, то это точки перегиба.

2) Покажем, что все три точки лежат на одной прямой. Для этого достаточно доказать, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны, т. е. их координаты пропорциональны:

$$\frac{(-2 + \sqrt{3}) - (-2 - \sqrt{3})}{1 - (-2 + \sqrt{3})} = \frac{\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}) - \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3})}{1 - \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})},$$

что, как несложно проверить, верно.

62. Имеем $y' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}xe^{-h^2x^2}$, $y'' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(1-2h^2x^2) = 0 \Leftrightarrow 1-2h^2x^2 = 0$, откуда $h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$, $h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$.

63. Первая арка циклоиды соответствует промежутку $0 \leq x \leq 2\pi a$. Найдём две первых производных:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

Отсюда следует, что при $a > 0$ имеем $y''_{xx} < 0$, если $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. на каждом из интервалов $(2\pi ka, 2\pi a(k+1))$ циклоида выпукла вверх. Точек перегиба нет, так как вторая производная нигде не меняет знака.

64. 1) Пусть $f''(x) \geq 0$ при $x \in (a, b)$ и пусть $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ – произвольные числа, сумма которых равна 1. Если x_1 и x_2 – любые точки интервала (a, b) и $x_1 < x_2$, то точка $p_1x_1 + p_2x_2$, очевидно, лежит между ними (любая точка x между x_1 и x_2 может быть представлена в виде $x = p_1x_1 + p_2x_2$, где $p_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, $p_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$). По формуле Лагранжа для отрезков $[x_1, x]$ и $[x, x_2]$ имеем:

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) - f(x_1) = (p_1x_1 + p_2x_2 - x_1)f'(\xi_1), \quad \text{где } \xi_1 \in (x_1, x);$$

$$f(x_2) - f(p_1x_1 + p_2x_2) = (x_2 - p_1x_1 - p_2x_2)f'(\xi_2), \quad \text{где } \xi_2 \in (x, x_2).$$

Упрощая, получим

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) - f(x_1) = p_2(x_2 - x_1)f'(\xi_1), \quad (1)$$

$$f(x_2) - f(p_1x_1 + p_2x_2) = p_1(x_2 - x_1)f'(\xi_2). \quad (2)$$

Умножим равенство (1) на p_1 , равенство (2) на p_2 :

$$p_1f(p_1x_1 + p_2x_2) - p_1f(x_1) = p_1p_2(x_2 - x_1)f'(\xi_1),$$

$$p_2f(x_2) - p_2f(p_1x_1 + p_2x_2) = p_1p_2(x_2 - x_1)f'(\xi_2)$$

и вычтем из второго первое:

$$\begin{aligned} p_2 f(x_2) + p_1 f(x_1) - (p_1 + p_2) f(p_1 x_1 + p_2 x_2) = \\ = p_1 p_2 (x_2 - x_1) (f'(\xi_2) - f'(\xi_1)), \end{aligned}$$

или, применяя в правой части ещё раз теорему Лагранжа на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$, с учётом $p_1 + p_2 = 1$ получим

$$p_2 f(x_2) + p_1 f(x_1) = f(p_1 x_1 + p_2 x_2) + p_1 p_2 (x_2 - x_1) (\xi_2 - \xi_1) f''(\xi_3),$$

где $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$. Так как $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $x_2 > x_1$, $\xi_2 > \xi_1$, $f''(\xi_3) \geq 0$, то последнее слагаемое справа неотрицательно. Отбрасывая его, получаем неравенство

$$p_2 f(x_2) + p_1 f(x_1) \geq f(p_1 x_1 + p_2 x_2),$$

т. е. функция $f(x)$ выпукла вниз на (a, b) .

2) Второй случай можно рассмотреть аналогично. Но можно поступить короче, воспользовавшись только что доказанным результатом. Пусть $f''(x) \leq 0$ на (a, b) , тогда функция $\varphi(x) = -f(x)$ имеет $\varphi''(x) \geq 0$ на (a, b) и по доказанному выше $\varphi(x)$ выпукла вниз на (a, b) , т. е.

$$p_2 \varphi(x_2) + p_1 \varphi(x_1) \geq \varphi(p_1 x_1 + p_2 x_2),$$

отсюда $p_2 f(x_2) + p_1 f(x_1) \leq f(p_1 x_1 + p_2 x_2)$, что означает, что $f(x)$ выпукла вверх на (a, b) .

65. Положим $\varphi_1(x) = x^n$ ($n > 1$), $\varphi_2(x) = e^x$, $\varphi_3(x) = x \ln x$, $\psi_1(x) = x^n$ ($0 < n < 1$), $\psi_2(x) = \ln x$. Тогда $\varphi_1''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, $\varphi_2''(x) = e^x$, $\varphi_3''(x) = \frac{1}{x}$, $\psi_1''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, $\psi_2''(x) = -\frac{1}{x^2}$. При $x \in (0, +\infty)$ имеем $\varphi_1''(x) > 0$, $\varphi_2''(x) > 0$, $\varphi_3''(x) > 0$, $\psi_1''(x) < 0$, $\psi_2''(x) < 0$, поэтому на основании задачи [8, № 1312] можно утверждать, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ выпуклы вниз, а функции ψ_1, ψ_2 выпуклы вверх на интервале $(0, +\infty)$.

66. а) Построив эскиз графика функции (или исследовав её с помощью производных) определяем, что, во-первых, эта функция непрерывна на всём множестве действительных чисел; во-вторых, убывает с выпуклостью вверх при отрицательных x и линейно возрастает справа от нуля. То есть с обеих сторон от нуля функция выпукла вверх, но слева убывает, а справа возрастает. В такой ситуации подграфик (гипограф) не является выпуклым множеством и, следовательно, функция не сохраняет выпуклости (вверх) на всей действительной прямой.

б) В данном случае функция всюду непрерывна, с разных сторон от нуля выпукла вверх (справа – в нестрогом смысле). Выясним дополнительно, существует ли общая касательная у обеих ветвей графика в точке $x = 0$. Вычислив односторонние производные

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\operatorname{arctg} 2x - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-\operatorname{arctg} 2x}{x} = -2,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-2x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{x} = -2,$$

убеждаемся, что они равны, т. е. касательная в точке $(0, \frac{\pi}{2})$ существует. Тогда получаем, что во всех точках кривой график лежит не выше касательной, что означает, что функция выпукла вверх на множестве $\mathbb{R}$ (в нестрогом смысле из-за линейного участка).

67. Так как односторонние производные

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2 - 0}{x} = 0,$$

не равны, то данная (непрерывная всюду) функция не является дифференцируемой, а значит, и дважды дифференцируемой в точке $x = 0$. Построив, далее, эскиз графика функции, определяем, что функция выпукла вниз слева и справа от нуля, при этом убывает при отрицательных x и возрастает при положительных. По теореме 5 отсюда следует, что функция выпукла вниз на интервале $(-1, 1)$.

68. Перепишем неравенство в виде: $f(3) - f(2) < f(4) - f(3)$. Воспользуемся теоремой Лагранжа в левой и правой частях последнего неравенства. Применяя теорему на сегменте $[2, 3]$, получим, что найдётся точка $c_1 \in (2, 3)$: $f(3) - f(2) = f'(c_1)(3 - 2)$, а внутри сегмента $[3, 4]$ найдётся точка c_2 : $f(4) - f(3) = f'(c_2)(4 - 3)$. В результате получаем неравенство $f'(c_1) < f'(c_2)$. Ещё раз применим теорему Лагранжа для производной на сегменте $[c_1, c_2]$: $\exists c \in (c_1, c_2)$: $f'(c_2) - f'(c_1) = f''(c)(c_2 - c_1)$, и поскольку $f'(c_2) - f'(c_1) > 0$, $c_2 - c_1 > 0$, то $f''(c) > 0$ и существование точки $c \in (c_1, c_2) \subset (1, 5)$ доказано.

69. Достаточно доказать, что $y'' > 0$. В самом деле, $y' = f'_g \cdot g'_x$, $y'' = f''_{gg} \cdot (g'_x)^2 + f'_g \cdot g''_{xx} > 0$, так как $f''_{gg} > 0$ (выпукла вниз), $(g'_x)^2 \geq 0$, $f'_g > 0$ (возрастает), $g''_{xx} > 0$ (выпукла вниз), что и требовалось доказать.

70. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, монотонно возрастает на $[a, b]$ и выпукла вверх. Возьмём любые $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$, $y_1 \neq y_2$. Так как $f(x)$ выпукла вверх, то

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

для всех $x_1 \neq x_2 \in [a, b]$. Пусть, например, $x_1 < x_2$. Так как обратная функция f^{-1} возрастает на $[f(a), f(b)]$, то

$$f^{-1}\left(\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right) \leq f^{-1}\left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right),$$

$$\text{т. е. } f^{-1}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leq f^{-1}\left(f\left(\frac{f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)}{2}\right)\right) = \frac{f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)}{2},$$

а это означает, что обратная функция f^{-1} выпукла вниз на $[f(a), f(b)]$. Случай, когда функция f монотонно убывает на $[a, b]$, рассматривается аналогично.

71. $a \in [-2, 2]$. Решение. Продифференцируем последовательно два раза: $y' = 4x^3 + 3ax^2 + 3x$, $y'' = 12x^2 + 6ax + 3 = 3(4x^2 + 2ax + 1) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = 4a^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow |a| \leq 2$.

72. Выясним, когда односторонние производные в точке $x = 0$ совпадают:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\operatorname{arctg} x - 0}{x - 0} = 1, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{ax - 0}{x - 0} = a.$$

Таким образом, при $a = 1$ функция дифференцируема в этой точке, а значит, график имеет касательную $y = x$ (постройте эскиз графика). Условие задачи будет выполняться при $a \geq 1$, поскольку слева и справа от точки $x = 0$ ветви графика будут лежать не ниже касательной в любой точке кривой, что соответствует выпуклости вниз. При $a < 1$ функция не является выпуклой на всём множестве действительных чисел.

73. Имеем $y = ax^3 + bx^2 \Rightarrow y'' = 6ax + 2b$. Во-первых, точка A лежит на кривой, во-вторых, вторая производная y'' в точке A равна 0 и меняет знак, т. е.

$$\begin{cases} y(1) = 3, \\ y''(1) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3, \\ 6a + 2b = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2}, \\ b = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Для этой пары выполнены достаточные условия точки перегиба.

74. Во-первых, точка $B(-2, 0)$ лежит на кривой, т. е. $y(-2) = 0$, во-вторых, в точке перегиба должно выполняться условие $y''(-2) = 0$ (при этом вторая производная меняет знак). Решая систему, находим $a = 1$, $b = 6$. Для этой пары выполнены достаточные условия точки перегиба.

75. В точке перегиба график должен иметь касательную:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin 2x - 0}{x - 0} = 2, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{ax(x - 1) - 0}{x - 0} = -a,$$

откуда, приравнявая, получаем $a = -2$. Осталось проверить, что при найденном значении параметра в левой и правой малых окрестностях нуля вторая производная имеет разные знаки:

$$\begin{cases} f''(x) > 0, & x < 0; \\ f''(x) < 0, & x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \sin 2x > 0, & x < 0; \\ 2a < 0, & x > 0; \end{cases} - \text{верно.}$$

Ответ: при $a = -2$ точка $(0, 0)$ является точкой перегиба кривой. Полезно привести графическую интерпретацию полученного результата.

76. Покажем, что подынтегральная функция $f(x) = e^{x^2+1}$ выпукла вниз на сегменте $[0, 1]$: $f''(x) = e^{x^2+1}(4x^2 + 2) > 0$. Тогда, согласно неравенству (5), получаем следующую оценку значения интеграла: $e^{\frac{5}{4}} \leq \int_0^1 e^{x^2+1} dx \leq \frac{e + e^2}{2}$.

77. Так как для степенной функции $f(x) = x^n$ в данном случае имеем $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$, то функция выпукла вниз на $(0, +\infty)$. Тогда для произвольных $0 < x < y$ в силу неравенства Йенсена получим:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{x^n+y^n}{2}.$$

78. а) При $x \neq y$ данное неравенство представляет собой неравенство Йенсена $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$ для строго выпуклой вниз функции $f(x) = e^x$ ($f''(x) = e^x > 0$).

б) При $x > 0, y > 0$ ($x \neq y$) после деления на 2 данное неравенство оказывается неравенством Йенсена для строго выпуклой вниз функции $f(x) = x \ln x$ ($f''(x) = \frac{1}{x} > 0$).

79. Возьмём, например, функцию $f(t) = \operatorname{arctg} t$, (строго) выпуклую вверх при $t \geq 0$. Применяя к ней указанное неравенство Йенсена, получим, что при всех $x, y \geq 0$ верно неравенство $\operatorname{arctg} \left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y)$. Может ли это неравенство обращаться в равенство?

80. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Так как $f''(x) = -\sin x < 0$ для $x \in (0, \pi)$, то функция f выпукла вверх на $[0, \pi]$. Согласно неравенству Йенсена (4), при $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ имеем

$$f\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) \geq \frac{1}{3}(f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)),$$

или $\sin \frac{\pi}{3} \geq \frac{1}{3}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$, откуда получаем требуемое неравенство.

81. Это неравенство есть следствие неравенства Йенсена (4), записанного для функции $\sin x$, выпуклой вверх на отрезке $[0, \pi]$, при $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$.

82. Пусть $S = x_1 + x_2 + x_3$. Положим $f(t) = \frac{t}{S-t}$. Так как $f''(t) = \frac{2S}{(S-t)^3} > 0$ при $t \in [0, S)$, то функция $f(t)$ выпукла вниз на полуинтервале $[0, S)$. Запишем для неё неравенство Йенсена (4) при $p_1 = p_2 = p_3 = 1$:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) = f\left(\frac{S}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Это и есть требуемое неравенство.

3 СЕМИНАР: Исследование функции на ограниченность, точные грани. Локальные экстремумы

«Не нужны нам математические школы. По-моему, это пережиток прошлого. Я категорический противник математических школ, потому что математические школы – это там, где отбирают людей и пичкают из одним монопредметом. Так было в Советском Союзе, и мне кажется, что это не очень хороший опыт».

Герман Греф, 5 октября 2018 г.¹

«Существуют фундаментальные науки, которые являются основой благополучия всего мира, и эти науки – физика, математика, химия, которые позволяют инженеру получить знания, соответствующие его рангу. Как и программирование, поскольку это решение нелинейных задач – без него немислмы исследования. Физматшколы необходимы. Об этом Греф судить не вправе».

Преподаватель МГТУ им. Н.Э. Баумана, кандидат технических наук Сергей Леготин.

**С целью защиты авторских прав
НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!**

3.1 Ограниченность в декартовых и полярных координатах. Точные грани функции и их достижимость

Об ограниченности функций одной переменной, заданных явно в декартовой системе координат, мы уже говорили ранее. Повторим это понятие, а затем расширим его на случай неявного и параметрического задания функции, а также введём понятие ограниченной функции в полярной системе координат.

Ограниченность в декартовых координатах. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X , называется *ограниченной снизу (сверху)* на этом множестве, если существует число m (соответственно, число M) такое, что при всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq m$ (соответственно, $f(x) \leq M$). При этом числа m и M называются, соответственно, *нижней и верхней границами* функции $f(x)$. Если существует хотя бы одна нижняя грань, то существует

¹До этого А. Фурсенко, будучи министром образования и науки РФ (2004–2012), настаивал на исключении из учебной программы элементов высшей математики.

сразу бесконечно много нижних граней, поскольку любое число, меньшее нижней грани, также является нижней гранью функции. Аналогичное замечание касается и верхних граней функции. То есть конечная нижняя (верхняя) грань – если существует, то не единственна.

Пример 52. Числа $m = -100$ и $m = 0$ являются нижними гранями функции $y = x^2$. $\square$

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной с двух сторон*, или просто *ограниченной* на множестве X , если она ограничена и снизу, и сверху, т. е. если существуют числа m и M такие, что при всех $x \in X$ выполняется двойное неравенство $m \leq f(x) \leq M$. Можно сформулировать определение ограниченной функции в эквивалентном виде: функция $f(x)$ называется *ограниченной* на множестве X , если существует положительное число M такое, что при всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Если составить отрицание последнего определения ограниченной функции, то получим определение функции, являющейся неограниченной на множестве X : функция $y = f(x)$ называется *неограниченной* на множестве X , если для любого (сколь угодно большого) числа $M > 0$ найдётся $x \in X$ такое, что $f(x) > M$ или $f(x) < -M$.

Эквивалентная формулировка ограниченности функции: функция $f(x)$ ограничена, если множество её значений $E(f)$ ограничено.

Пример 53. Функция $f(x) = \arctg \frac{3e^x - 7x + 11}{x^2 - 4}$ является ограниченной, так как при всех допустимых x выполняется $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$. $\square$

Точные грани функции. *Точной верхней (нижней) гранью функции*, определённой на множестве X , называется точная верхняя (нижняя) грань множества её значений. Точная верхняя грань функции обозначается $\sup_{x \in X} f(x)$, а точная нижняя, соответственно, $\inf_{x \in X} f(x)$. У ограниченных функций существуют конечные точные грани. Если функция не ограничена сверху (снизу), то считают, что её точная верхняя (нижняя) грань равна $+\infty$ ($-\infty$).

Пример 54. Точные грани функции $f(x) = \arctg \frac{3e^x - 7x + 11}{x^2 - 4}$ равны: $\sup_{x \neq \pm 2} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\inf_{x \neq \pm 2} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. Это следует из того, что $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3e^x - 7x + 11}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3e^x - 7x + 11}{x^2 - 4} = +\infty$ и свойств арктангенса. $\square$

Наибольшее и наименьшее значения функции. Если точные грани достигаются (при каких-либо значениях аргумента из множества X), то они называются наибольшим и наименьшим значениями функции на множестве X . Приведём соответствующие определения.

Действительное число A называется *наибольшим* (соответственно, *наименьшим*) значением функции на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, если:

1) для любых $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq A$ (соответственно, $f(x) \geq A$);

2) существует $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = A$.

Обозначение: $A = \max_{x \in X} f(x)$ (в случае наименьшего значения $A = \min_{x \in X} f(x)$).¹ Иногда наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве называют её *глобальными* максимумом и минимумом.

Наибольшее и наименьшее значения функции (если они существуют) единственны и конечны. Для того чтобы у функции на заданном множестве существовали наибольшее и наименьшее значения, необходимо (но не достаточно), чтобы функция была ограничена на этом множестве.

Пример 55. Функция

$$y = \arctg \frac{3e^x - 7x + 11}{x^2 - 4}$$

из предыдущего примера, очевидно, ограничена на своей области определения, но при этом у неё не существует ни наименьшего, ни наибольшего значений. $\square$

В некоторых случаях существование наибольшего и наименьшего значений гарантировано. Так, например, в силу теоремы Вейерштрасса, функция $f(x)$, определённая и непрерывная на сегменте $[a, b]$, обязательно достигает в некоторых точках этого сегмента своих наибольшего и наименьшего значений.

Ограниченность кривой, заданной параметрически или неявно. Если функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T,$$

то исследование её на ограниченность фактически сводится к исследованию ограниченности функции $y = y(t)$ на множестве T .

Если же кривая задана неявно $F(x, y) = 0$, то в большинстве случаев кривую вначале параметризуют, и уже затем исследуют, в том числе на ограниченность.

Пример 56. Исследовать на ограниченность и найти точные грани кривой, заданной неявно уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$, эллипс).

Решение.

¹Первое из условий в этом определении означает, что A является наибольшим из всех значений функции на множестве X , а второе – что это значение достигается хотя бы в одной точке этого множества.

1-й способ: приведём уравнение к виду $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow y \in [-b, b]$.

2-й способ: параметризуем эллипс $x = a \cos t, y = b \sin t \Rightarrow y \in [-b, b]$. $\square$

Ограниченность в полярных координатах. Рассмотрим два возможных способа исследования кривой на ограниченность в случае, когда кривая определяется полярным уравнением.

1-й способ (переход к прямоугольным координатам). Если кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $\varphi \in \Phi$, то, подставляя вместо r выражение $r(\varphi)$ в формулы перехода к декартовым координатам, получим параметрически заданную кривую (в роли параметра выступает φ)

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi, \quad \text{где } \varphi \in \Phi.$$

2-й способ (исследование в полярных координатах). Во многих случаях интерес представляет исследование на ограниченность и связанные с этим вопросы непосредственно в полярных координатах. Приведём соответствующие определения.

Кривая $r = r(\varphi)$, определённая на множестве Φ , называется *ограниченной снизу (сверху)* на этом множестве, если найдётся положительное число m (соответственно, M) такое, что при всех $\varphi \in \Phi$ выполняется $r(\varphi) \geq m$ (соответственно, $r(\varphi) \leq M$). Аналогично тому как это делается в декартовых координатах, вводится понятие двусторонней ограниченности.

Геометрически ограниченность в полярных координатах означает, что существует некоторый круг с центром в начале координат такой, что кривая полностью принадлежит данному кругу.

Пример 57. Кардиоида $r = a(1 + \cos \varphi)$ и трилистник $r = a \sin 3\varphi$ ($a > 0$) являются ограниченными кривыми, поскольку в случае с кардиоидой $r \leq 2a$, а для трилистника $r \leq a$ (при всех $\varphi \in \mathbb{R}$). А, например, спираль Архимеда $r = a\varphi$ ($a \neq 0$) – не ограничена. $\square$

Пример 58. Найти точные грани (наибольшее и наименьшее значения) кардиоиды

$$r = a(1 + \cos \varphi) \quad (a > 0).$$

Решение. Очевидно, что точная верхняя грань (она достигается, поэтому временно является наибольшим значением), равная $2a$, достигается функцией $r(\varphi)$, когда $\cos \varphi = 1$, т. е. при $\varphi = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Точная нижняя грань (наименьшее значение), равная 0, достигается, когда $\cos \varphi = -1$, т. е. при $\varphi = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. $\square$

3.2 Локальные и краевые экстремумы

«Человечество не может существовать без новых и новых открытий
в физике, математике».

В.В. Путин, президент РФ, 5 октября 2018 г.

К важным характеристикам функций относят наличие у них экстремумов – как локальных, так и глобальных. Задачи нахождения экстремумов возникают во всех областях человеческого знания: в оптимизации, теории управления, в экономике, технологиях, естественных и гуманитарных науках. Остановимся подробнее на этом вопросе.

Локальные экстремумы. Обратимся вначале к случаю, когда функция одной переменной задана явно уравнением $y = f(x)$ на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ (нестрогий) *локальный максимум* (соответственно, *локальный минимум*), если найдётся окрестность¹ этой точки такая, что при всех $x \in X$ из указанной окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ (соответственно, $f(x) \geq f(x_0)$). При этом точка x_0 называется *точкой локального максимума* (соответственно, *точкой локального минимума*), а значение $f(x_0)$ функции в этой точке называют *локальным максимумом* (соответственно, *локальным минимумом*).

Пример 59. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x < -1; \\ 1, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ x, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

(постройте график) любая точка $x \in [-1, 1]$ является точкой нестрогого локального минимума. $\square$

Для сравнения сформулируем определение строгого локального максимума. Функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ *строгий локальный максимум*, если найдётся окрестность этой точки такая, что при всех $x \neq x_0$ из указанной окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Иначе говоря, если при любом достаточно малом $h > 0$ выполняется строгое неравенство $f(x_0 \pm h) < f(x_0)$.

Локальные максимумы и минимумы называют единым термином – *локальные экстремумы*. При этом функция не обязательно должна быть непрерывной и, тем более, дифференцируемой в точке x_0 .

О количестве локальных экстремумов. Количество локальных экстремумов у функции на заданном множестве может быть произвольным: 1) функция может не иметь ни одного экстремума ($y = x$, $x \in \mathbb{R}$); 2) иметь конечное число экстремумов ($y = ||x - 1| - 1| - 1|$, $x \in \mathbb{R}$); 3) иметь бесконечное количество экстремальных точек ($y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$).

Теорема. Для функции, определённой на сегменте $[a, b]$, множество точек строгого локального экстремума не более чем счётно.

Пример 60. Количество нестрогих локальных экстремумов на сегменте может быть континуально, например у любой постоянной функции $f(x) = \text{const}$, $x \in [a, b]$,

¹Имеется в виду двусторонняя окрестность.

любая точка сегмента является точкой нестрогого локального максимума и одновременно точкой нестрогого локального минимума. $\square$

Замечание (оценка знака приращения функции в точке при исследовании на экстремум). Из определения локального экстремума следует практический приём, нередко используемый при решении задач, особенно в ситуации, когда производная в экстремальной точке не существует или её существование требует проведения дополнительных исследований. Речь идёт о том, что в окрестности экстремальной точки x_0 приращение функции $\Delta f(x_0)$ сохраняет определённый знак: оно неотрицательно (положительно) в точке минимума и неположительно (отрицательно) в точке максимума.

Пример 61. Имеет ли функция локальный экстремум в точке $x = 0$, и если да, то какой именно

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-\frac{1}{x^2}} \left(2 + \cos \frac{1}{x^2} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0? \end{cases}$$

Решение. Придадим переменной x в точке 0 произвольно малое приращение $\Delta x \neq 0$, выпишем отвечающее ему приращение функции и оценим его знак в этой окрестности:

$$\Delta f(0) = f(\Delta x) - f(0) = 3^{-\frac{1}{\Delta x^2}} \left(2 + \cos \frac{1}{\Delta x^2} \right) > 0,$$

следовательно, функция $f(x)$ имеет при $x = 0$ строгий локальный минимум, равный $f(0) = 0$. $\square$

Краевые экстремумы. Наряду с локальными экстремумами существуют краевые экстремумы. Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$. Говорят, что $f(x)$ имеет в граничной точке b этого сегмента *краевой максимум* (соответственно, *краевой минимум*), если найдётся левая полукрестность точки b , в пределах которой значение $f(b)$ является наибольшим (соответственно, наименьшим) среди всех других значений этой функции. Аналогично определяются краевой максимум и краевой минимум в граничной точке a сегмента $[a, b]$.

Краевой максимум и краевой минимум объединяются общим названием: *краевой экстремум*.

3.3 Необходимое и достаточные условия локального экстремума

В 1980-х годах известный голландский учёный, специалист по информатике Эдсгер Виле Дейкстра выдвинул предположение, подтверждённое недавними исследованиями специалистов из Университета Вашингтона, что язык

программирования Python легче даётся тем, у кого есть лингвистические, а не математические способности. Основная активность мозга концентрировалась у программистов в левом полушарии, контролирующем речь, а также способности к чтению и письму. К удивлению специалистов, во время экспериментов с программистами они не обнаружили у них особой активности участков мозга, связанной с математическим или логическим мышлением.

Исследуем вопрос о существовании локальных экстремумов и способы их нахождения. Сформулируем вначале необходимые определения.

Точки, в которых первая производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует, называются *критическими точками 1-го рода* (точками *возможного экстремума*). При этом те из них, в которых производная равна нулю, называют *стационарными точками*.

Теорема 1 (*необходимое условие локального экстремума*). Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, то в этой точке производная $f'(x)$ обращается в нуль или (конечной) производной $f'(x_0)$ не существует.

Геометрически необходимый признак локального экстремума означает, что касательная к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ (если она существует) параллельна оси абсцисс.

Пример 62. Функции $y = x^2$, $y = |x|$ и $y = x^{\frac{2}{3}}$ имеют в точке $x_0 = 0$ строгие локальные минимумы. При этом у первой из функций производная в нуле равна 0, у второй – не существует, а у третьей – существует, но бесконечна. $\square$

Теорема 2 (*1-е достаточное условие локального экстремума*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 , и непрерывна в точке x_0 . Тогда, если в пределах указанной окрестности:

- 1) $f'(x) < 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) > 0$ справа от неё, то $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум;
- 2) если производная при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум;
- 3) если же производная имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0 , то экстремума в данной точке нет.

Пример 63. [8, № 1432] Найти экстремумы функции $y = x + \frac{1}{x}$.

Решение. Найдём первую производную $y' = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ и критические точки: $x = 0; \pm 1$. В стационарной точке $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет строгий локальный минимум, равный $y_{\min} = y(1) = 2$. В силу нечётности функции, в точке $x = -1$ имеется строгий локальный максимум $y_{\max} = y(-1) = -2$. Справа и слева от точки $x = 0$ производная

отрицательна, следовательно, экстремума в ней нет. $\square$

Теорема 3 (2-е достаточное условие локального экстремума). Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$ (и при этом конечна), то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, а именно максимум при $f''(x_0) < 0$, и минимум при $f''(x_0) > 0$.

Пример 64. Функция $y = x^2$ имеет в точке $x = 0$ положительную вторую производную $y'' = 2$, поэтому, согласно теореме, в этой точке у функции имеется строгий локальный минимум. $\square$

Теорема 4 (3-е достаточное условие локального экстремума). Пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда при чётном n функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, а именно: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если же n – нечётное число, то функция $f(x)$ не имеет экстремума в точке x_0 .

Пример 65. Для функции $y = x^4$ в точке $x = 0$ имеем: $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$, а $y^{(4)}(0) = 24 > 0$, т. к. $n = 4$ – чётное число, то, в силу теоремы, в точке $x = 0$ функция имеет строгий локальный минимум. $\square$

Пример 66. Для функции $y = x^5$ в точке $x = 0$ имеем: $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0$, а $y^{(5)}(0) = 120 \neq 0$, т. к. $n = 5$ – нечётное число, то функция не имеет экстремума в точке $x = 0$. $\square$

Замечание 1. Если функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$, то своё наибольшее значение на $[a, b]$ эта функция может достигать либо во внутренней точке x_0 этого сегмента (тогда оно совпадает с одним из локальных максимумов функции), либо на одном из концов сегмента (и тогда оно совпадает с одним из краевых максимумов). Отсюда ясно, что для нахождения наибольшего значения функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ надо сравнить между собой значения $f(x)$ во всех точках локального экстремума и в граничных точках сегмента. Наибольшее из этих значений и будет наибольшим значением функции на $[a, b]$. Аналогично находится и наименьшее значение функции на сегменте.

Замечание 2. Может случиться так, что дифференцируемая функция не имеет на сегменте $[a, b]$ стационарных точек. В этом случае $f(x)$ является монотонной на этом сегменте и её наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах $[a, b]$.

Пример 67. Найти наименьшее значение функции $y = 10 \sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$ на сегменте $[-\frac{5\pi}{6}, 0]$.

Решение. Найдём производную: $y'(x) = 10 \cos x - \frac{36}{\pi} < 0$ на указанном отрезке. Поэтому функция является убывающей и, следовательно, своё наибольшее значение

достигает на левом конце сегмента: $y_{\max} = y(-\frac{5\pi}{6}) = 32$. $\square$

Достаточное условие краевого экстремума.

Теорема 5 (*достаточное условие краевого экстремума*). Для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке b сегмента $[a, b]$ краевой максимум (краевой минимум), достаточно, чтобы эта функция имела в точке b положительную (отрицательную) левую производную.

Аналогично формулируется достаточное условия краевого экстремума на левом конце сегмента – в точке a .

3.4 Нахождение локальных экстремумов у кривых, заданных параметрически или неявно

Параметрическое задание кривой. Предположим, кривая задана в декартовых координатах параметрически системой уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T,$$

с дифференцируемыми функциями $x(t)$ и $y(t)$, и требуется найти её локальные (краевые) экстремумы. Вся схема исследования на экстремумы, применяемая для явно заданных функций, справедлива и в этом случае. А именно, находится первая производная

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

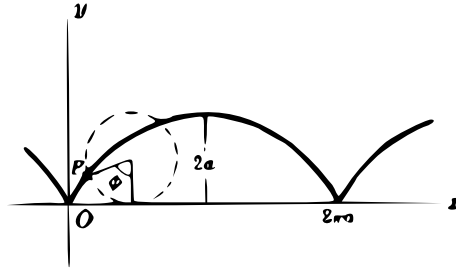
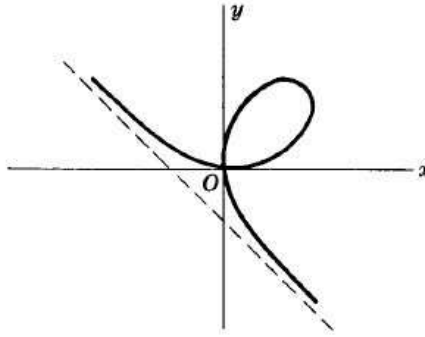
определяются критические точки 1-го рода, исследуется знак производной в промежутках между ними. В зависимости от полученных результатов делается вывод о наличии либо отсутствии экстремума в конкретной точке возможного экстремума. Отобрав точки, в которых имеется экстремум, вычисляются сами экстремальные значения.

Пример 68. Исследовать на локальные экстремумы *циклоиду*

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0).$$

Решение. Вычислим производную: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$. Найдём точки возможного экстремума: $y'_x = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = \pi n$, т. е. $x = \pi a n$, $n \in \mathbb{Z}$.

1) Заметим, что производная не существует в точках, где $\cos t = 1 \Leftrightarrow t = 2\pi k$, т. е. $x = 2\pi a k$. В этих точках функция непрерывна, производная отрицательна слева и положительна справа от каждой из них. Значит, в этих точках имеются локальные минимумы, равные $y(t)\big|_{t=2\pi k} = 0$.

Рис. 24: Циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.Рис. 25: Декартов лист $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

2) При нечётных $n = 2k + 1$ в стационарных точках $x = \pi a(2k + 1)$ производная меняет знак с плюса на минус, а значит, в этих точках имеются локальные максимумы, равные $y(t) \Big|_{t=\pi+2\pi k} = 2a$.

Кривая периодична, поэтому достаточно было исследовать её на экстремумы на одном периоде, например, при $0 \leq t < 2\pi$ (Рис. 24). $\square$

Неявное задание кривой. Если кривая задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешённым ни относительно y , ни относительно x , то, как правило, делают параметризацию и далее исследуют кривую как заданную параметрически.

Пример 69. Исследовать на локальные экстремумы кривую *декартов лист*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0).$$

Решение. Найдём параметрические уравнения данной кривой, положив $y = tx$. Подставив в исходное уравнение, получим

$$x^2(x(1 + t^3) - 3at) = 0,$$

откуда или $x = 0 \Rightarrow y = 0$ (т. е. эта точка лежит на кривой), или

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad (t \neq -1).$$

Теперь, когда получены параметрические уравнения кривой, для исследования на экстремумы найдём первую производную

$$y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad x'_t = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \Rightarrow y'_x = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

Отберём значения параметра t , при которых производная обращается в нуль

$$t = 0 \quad (x = 0, y = 0), \quad t = \sqrt[3]{2} \quad (x = a\sqrt[3]{2}, y = a\sqrt[3]{4}),$$

или не существует: $t = -1$ (x, y, x'_t, y'_t не определены), $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ($x = a\sqrt[3]{4}, y = a\sqrt[3]{2}$). Выясним, имеется ли в каждой из отобранных точек экстремум, и если есть, то какой именно. В таблице ниже для x и y приводятся не промежутки, а соответствующие интервалам по t диапазоны их изменения. Каждому промежутку изменения t в первой строке соответствует своя ветвь графика.¹

t	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
x	$(+0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(0, a\sqrt[3]{4})$	$(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$	$(a\sqrt[3]{2}, +0)$
y	$(-0, -\infty)$	$(+\infty, 0)$	$(0, a\sqrt[3]{2})$	$(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$	$(a\sqrt[3]{4}, +0)$
y'	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Таблица 1: Здесь есть информация об экстремумах, найдите их.

1) $t = -1$: при $t \rightarrow -1$ имеем $x, y \rightarrow \infty$, поэтому экстремума нет.

2) $t = 0$: при прохождении параметра через точку $t = 0$ увеличению t соответствует увеличение x , а переменная y меняет убывание на возрастание. Поэтому в данной точке будет локальный минимум, равный 0.

3) $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$: в левой полукрестности точки $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ увеличению t соответствует рост как x , так и y , а в правой полукрестности этой точки увеличению t отвечает уменьшение x , но увеличение y . В результате при прохождении параметра через точку $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ значения y возрастают. Значит, в этой точке нет экстремума.

4) $t = \sqrt[3]{2}$: в точке $t = \sqrt[3]{2}$ будет локальный максимум, равный $a\sqrt[3]{4}$, так как при $t \rightarrow \sqrt[3]{2} - 0$ увеличению t соответствует уменьшение x и увеличение y , а в правой полукрестности этой точки x продолжает уменьшаться, а y сменяет возрастание на убывание (найдите эти экстремумы на кривой, Рис. 25). $\square$

¹На следующем семинаре мы будем строить кривые, заданные параметрически, и увидим, что на практике зачастую бывает удобнее вначале заполнить таблицу, построить кривую, и лишь затем проанализировать экстремумы, когда они становятся видны. Без построения кривой рассуждения 1)-4) относительно экстремумов неочевидны.

3.5 Нахождение локальных экстремумов в полярной системе координат

Пусть кривая задана в полярной системе координат явным уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in \Phi$. Тогда для исследования этой кривой на экстремумы существуют два основных подхода.

В первом случае при помощи известных формул перехода от полярных координат к декартовым получаем параметрические уравнения кривой в декартовой системе координат

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi, \\ y = r(\varphi) \sin \varphi, \end{cases}$$

и затем исследуем данную кривую по схеме согласно предыдущему пункту. Аналогично можно поступить в случаях, когда кривая в полярных координатах задана явным уравнением $\varphi = \varphi(r)$, $r \in D$, или параметрически $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $t \in T$.

Во втором случае, оставаясь в полярной системе координат, исследуем на экстремумы с помощью первой производной r'_φ .

Какой из способов предпочесть – зависит от вида кривой, обычно исследование проводится в той системе координат, в которой уравнения кривой выглядят естественней и проще.

Пример 70. Найти область определения и исследовать на локальные экстремумы кривую

$$r = \sin 2\varphi.$$

Решение. Найдём область определения функции из расчёта $r \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in [\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что функция периодична с периодом $T = \pi$, поэтому достаточно исследовать кривую на отрезке $[0, \pi]$. Пересекая данный отрезок с областью определения функции, получаем, что функция определена лишь в секторе $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Для нахождения локальных экстремумов вычислим производную $r'_\varphi = 2 \cos 2\varphi$ и, приравняв её к нулю, находим стационарные точки $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Отрезку $[0, \frac{\pi}{2}]$ принадлежит лишь одна точка $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Поскольку в этой точке производная меняет знак с плюса на минус, то это точка локального максимума (наиболее удалённая от начала координат). Подставляя в функцию, находим сам локальный максимум, он равен 1. При этом в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ достигается наименьшее значение функции, равное 0. Кривая изображена на Рис. 26.

Вопрос: как будет выглядеть кривая, задаваемая уравнением $r = |\sin 2\varphi|$, а также кривая $r = \sin 2\varphi$, если её рассматривать в обобщённой полярной системе координат, в которой переменная r может принимать любые действительные значения (не обязательно неотрицательные, как в обычных полярных координатах)? $\square$

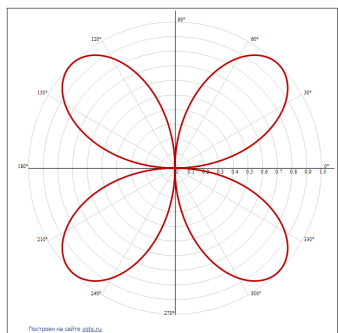


Рис. 26: Кривая $r = \sin 2\varphi$

3.6 Задачи для самостоятельного решения

№83. Привести пример ограниченной на сегменте $[0, 1]$ функции, не достигающей своей точной нижней грани ни на каком сегменте $[a, b] \subset [0, 1]$.

№84. Привести пример функции, непрерывной на $[a, b]$, с бесконечным множеством точек строгого локального экстремума.

Задачи на нахождение локальных максимумов и минимумов, а также точных граней функций, заданных явно в декартовой системе координат:

№85. Определите, имеется ли экстремум в точке x_0 у функций, графики которых изображены на Рис. 27, и если да, то какой именно (максимум или минимум, локальный или краевой, строгий или нестрогий).

№86. Исследовать на локальные экстремумы функцию:

$$\text{а) } y = \operatorname{sgn} x; \quad \text{б) функцию Дирихле;} \quad \text{в) } y = \arcsin(\sin x).$$

№87. [8, № 1417] Исследовать на экстремумы функцию $y = x^m(1 - x)^n$, где $n, m \in \mathbb{N}$.

№88. [8, № 1420] Исследовать на локальные экстремумы функцию

$$y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

№89. [8, № 1423] Исследовать на экстремум в точке $x = x_0$ функцию $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$ ($n \in \mathbb{N}$), где функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и $\varphi(x_0) \neq 0$.

№90. [8, № 1425] Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный максимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, а справа от неё

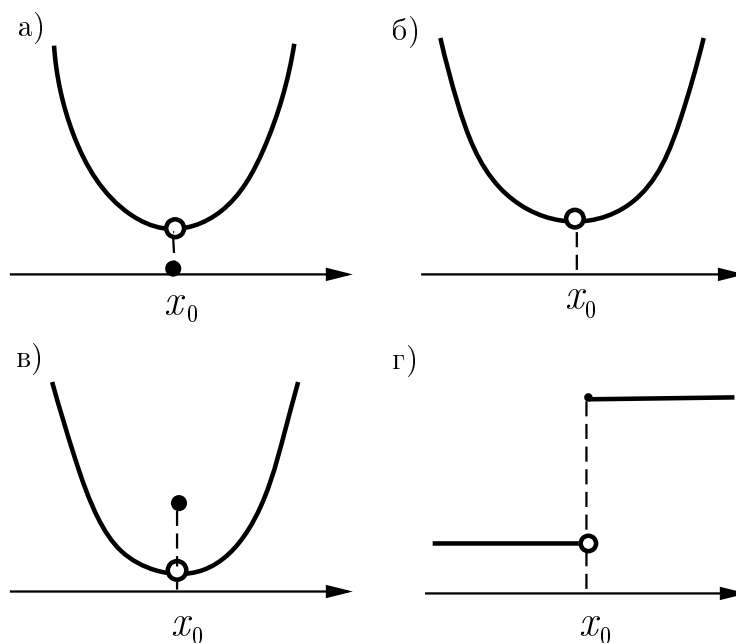


Рис. 27: Есть ли на этих рисунках локальный экстремум?

убывает? Рассмотреть пример

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

Предложить свой пример.

№91. [8, № 1426] Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ минимум, а функция

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не имеет в точке $x = 0$ экстремума, хотя $f^{(n)}(0) = 0$, $g^{(n)}(0) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

№92. [8, № 1427(a)] Исследовать на локальные экстремумы функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

№93. [8, № 1428] Исследовать на экстремум в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} |x|(2 + \cos \frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и построить график функции.

№94. [8, № 1444] Найти локальные экстремумы функции

$$f(x) = |x| e^{-|x-1|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

№95. [8, № 1447] Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ на сегменте $[-10, 10]$.

№96. Найти $\max_{x \in [-2; 3]} f(x)$ и $\min_{x \in [-2; 3]} f(x)$, если $f(x) = |3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 43|$.

№97. Найти точные грани функции $f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{2 - x}$.

№98. [8, № 1452] Найти точную нижнюю ($\inf$) и точную верхнюю ($\sup$) грани функции $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}$.

№99. [8, № 1453] Найти точную нижнюю ($\inf$) и точную верхнюю ($\sup$) грани функции

$$f(x) = e^{-x^2} \cos(x^2) \quad \text{на интервале } (-\infty, +\infty).$$

№100. [8, № 1490] Найти локальные экстремумы функции

$$f(x) = (x + 1)^{\frac{2}{3}} - (x - 1)^{\frac{2}{3}}.$$

№101. Найти локальные экстремумы функции

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

Решить задачи на нахождение локальных экстремумов, точных граней функций, заданных неявно или параметрически в прямоугольной, а также в полярной системах координат:

№102. Найти экстремумы кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№103. Найти экстремальные точки кривой, заданной неявным уравнением в декартовых координатах

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2.$$

Указание: перейти к полярным координатам.

№104. Найти область определения, экстремумы и построить *трилистник* $r = a \sin 3\varphi$ ($a > 0$): а) в стандартной полярной системе координат ($r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$); б) в обобщённых полярных координатах ($r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$).

№105. Найти область определения и локальные экстремумы кривой $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ ($a > 0$).

№106. Найти область определения, участки монотонности и локальные экстремумы кривой $r = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$.

№107. Исследовать на экстремумы *лемнискату Бернулли*

$$r = \sqrt{a \cos 2\varphi} \quad (a > 0).$$

№108. Какую кривую задаёт на плоскости уравнение $r = \frac{3}{2 - \cos \varphi}$? Найти её экстремальные точки.

Указание: перейти к прямоугольным координатам.

№109. Какую кривую задаёт на плоскости уравнение $r = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}$? Найти её экстремальные точки.

Указание: перейти к прямоугольным координатам.

№110. Какую кривую задаёт на плоскости уравнение $r = \frac{4}{1 + \sin \varphi}$? Найти её экстремальные точки.

Указание: перейти к прямоугольным координатам.

Решить задачи на доказательство утверждений:

№111. [8, № 1456(а)] Доказать неравенство $|3x - x^3| \leq 2$ при $|x| \leq 2$.

№112. [8, № 1456(б)] Доказать справедливость неравенства при $0 \leq x \leq 1$ и $p > 1$:

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

№113. [8, № 1456(в)] Доказать неравенство

$$x^m(a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} \cdot a^{m+n}$$

при $m > 0$, $n > 0$ и $0 \leq x \leq a$.

№114. [8, № 1459] *Абсолютным отклонением* двух функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется число

$$\Delta = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Определить абсолютное отклонение функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ на сегменте $[0, 1]$.

№115. [8, № 1556] Доказать, что если функция $f(x)$ неотрицательна, то функция $F(x) = C \cdot f^2(x)$ ($C > 0$) имеет в точности те же точки локальных экстремумов, что и функция $f(x)$.

№116. [8, № 1557] Доказать, что если функция $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая в строгом смысле при $-\infty < t < +\infty$, то функции $f(x)$ и $\varphi(f(x))$ имеют одни и те же точки локальных экстремумов.

№117. Пусть $f(x)$ — чётная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, причём $f''(0) \neq 0$. Доказать, что точка $x = 0$ является точкой экстремума этой функции.

Решить задачи оптимизации с геометрическим смыслом:

№118. [8, № 1561] Из всех прямоугольников данной площади S определить тот, периметр которого наименьший.

№119. [8, № 1565] В эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, площадь которого наибольшая.

№120. [8, № 1575] Найти кратчайшее и наибольшее расстояния от точки $A(2; 0)$ до окружности $x^2 + y^2 = 1$.

№121. [8, № 1577] Через точку $M(x, y)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести касательную, образующую с осями координат треугольник, площадь которого наименьшая.

№122. [8, № 1581] Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R , чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

Не используя производной, привлекая другие приёмы, решить задачи:

№123. [8, № 1458] При каком выборе коэффициента q многочлен $P(x) = x^2 + q$ наименее отклоняется от нуля на сегменте $[-1, 1]$, т. е. $E_p = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| \rightarrow \min$.

№124. Найти локальные минимумы функции

$$f(x) = |x + |x - 1|| + |x + 1|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В каких точках они достигаются?

№125. Найти точную верхнюю грань функции

$$y = \min \left(1 - x; 2x - 1; \frac{x}{3} \right)$$

на отрезке $[0, 1]$. При каком значении x она достигается? Здесь $\min(a; b; c)$ – наименьшее из чисел a, b, c .

№126. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 10, \quad x \in \mathbb{R}.$$

№127. Найти локальные минимумы функции

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

При каких x они достигаются?

№128. Используя тригонометрическую подстановку $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, найти точную верхнюю грань функции $f(x) = x\sqrt{1 - 3x^2}$.

№129. Найти множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x,$$

а также её точную верхнюю и точную нижнюю грани.

№130. Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$$

и точку, в которой оно достигается.

№131. Найти точную нижнюю грань функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + \sqrt{x + 1} + \frac{1}{x} - 1$$

на промежутке $(0, +\infty)$ и указать, при каких x она достигается.

№132. Найти наибольшее на отрезке $[-\frac{1}{2}; 1]$ значение алгебраического многочлена

$$y = (1 - x)^5(1 + 2x)^2(1 + x).$$

№133. Определить точную нижнюю грань функции

$$f(x) = \frac{x^2}{8} + x \cos x + \cos 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Достигается ли она?

№134. Для каждого $a > 0$ найти наименьшее значение функции

$$f(x) = 4^x + 2^{x+1}ax + a^2x^2.$$

№135. Функция $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + a}$ определена на отрезке $[5, 7]$. При каких значениях параметра a наибольшее на этом отрезке значение функции $f(x)$ не превышает $\frac{1}{10}$?

3.7 Ответы и решения

83. Например, $f(x) = R(x)$, если $x \in \mathbb{Q}$, где $R(x)$ – функция Римана, $f(x) = 1$, если $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

84. Например,
$$f(x) = \begin{cases} (x-a) \sin \frac{\pi}{x-a}, & x \neq a; \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

85. а) Строгий локальный минимум; б) нет экстремума (функция не определена в точке); в) строгий локальный максимум; г) нестрогий локальный максимум.

86. а) Каждая точка $x \neq 0$ является точкой нестрогого локального максимума (и одновременно нестрогого локального минимума). Точка $x = 0$ не является экстремальной.

б) Для функции Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рационально}; \\ 0, & x - \text{иррационально}; \end{cases}$ любая рациональная точка является точкой нестрогого локального максимума, а любая иррациональная – нестрогого локального минимума.

в) Функция периодическая с периодом 2π (постройте график). Точки $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, являются точками строгого локального максимума, равного $\frac{\pi}{2}$; точки $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, – точки строгого локального минимума, равного $-\frac{\pi}{2}$.

87. Найдём производную и стационарные точки:

$$y'(x) = (m+n)x^{m-1}(1-x)^{n-1} \left(\frac{m}{m+n} - x \right) = 0.$$

Итак, точки возможного экстремума: $x_1 = 0$ ($m > 1$), $x_2 = 1$ ($n > 1$), $x_3 = \frac{m}{m+n}$. Проверим в каждой из этих точек достаточные условия экстремума. Возьмём достаточно малое положительное ε (пусть $0 < \varepsilon < \frac{m}{m+n}$).

1) $x_1 = 0$. При m чётном $y'(-\varepsilon) < 0$, $y'(\varepsilon) > 0$, следовательно, в точке $x_1 = 0$ функция имеет локальный минимум, равный 0. При m нечётном $y'(-\varepsilon) > 0$, $y'(\varepsilon) > 0$ и экстремума нет.

2) Аналогично для точки $x_2 = 1$. При n чётном имеем $y'(1-\varepsilon) < 0$, $y'(1+\varepsilon) > 0$, следовательно, в точке $x_2 = 1$ функция имеет локальный минимум, равный 0. При n нечётном $y'(1-\varepsilon) > 0$, $y'(1+\varepsilon) > 0$ и экстремума нет.

3) Для точки $x_3 = \frac{m}{m+n}$ имеем: $y'(\frac{m}{m+n} - \varepsilon) > 0$, $y'(\frac{m}{m+n} + \varepsilon) < 0$, следовательно, в точке $x_3 = \frac{m}{m+n}$ функция имеет локальный максимум, равный $y(\frac{m}{m+n}) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$.

В случае $m = 1$ ($n = 1$) получаем такие же результаты.

88. Так как функция всюду дифференцируема, то исследуем её на экстре-

мумы при помощи производной:

$$y' = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{-x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим единственную стационарную точку $x = 0$. Проверим выполнение достаточных условий. Если n чётно, то $y' < 0$ слева и справа от $x = 0$, следовательно, в этой точке нет экстремума. Если же n нечётно, то $y' < 0$ при $x > 0$ и $y' > 0$ при $x < 0$. Следовательно, имеем локальный максимум при $x = 0$, причём $y(0) = 1$.

89. Из непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0 и условия $\varphi(x_0) \neq 0$ следует, что существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в которой эта функция сохраняет знак, равный знаку $\varphi(x_0)$. Поскольку при чётном n приращение функции $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \varphi(x)$ в δ -окрестности точки x_0 сохраняет постоянный знак, совпадающий со знаком $\varphi(x_0)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный минимум при $\varphi(x_0) > 0$ и локальный максимум при $\varphi(x_0) < 0$. Если же n нечётное, то разность $f(x) - f(x_0)$ принимает разные по знаку значения в любой δ -окрестности точки x_0 , т. е. экстремума нет.

90. Нельзя. В данном примере непрерывная функция $f(x)$ в точке $x_0 = 0$ имеет строгий локальный максимум, т. к. приращение функции в этой точке сохраняет отрицательный знак:

$$\Delta f(0) = f(x) - f(0) = -x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

В то же время производная

$$f'(x) = -4x - 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

в любом из интервалов $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta)$, где $\delta > 0$ – произвольно мало, принимает разные по знаку значения (достаточно рассмотреть две числовые последовательности $x'_n = \frac{1}{2\pi n}$, $x''_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$ ($n \in \mathbb{N}$), для которых $f'(x'_n) = -\frac{2}{\pi n} + 1 > 0$, $f'(x''_n) = -\frac{4}{\pi + 2\pi n} - 1 < 0$). Следовательно, в каждом таком интервале функция не является монотонной.

91. Вычислим приращения функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = 0$:

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}},$$

$$\Delta g(0) = g(0 + \Delta x) - g(0) = \Delta x \cdot e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}.$$

Приращение функции $f(x)$ в любой окрестности точки $x = 0$ положительно, поэтому $f(x)$ имеет в этой точке минимум, равный 0. Приращение $g(x)$ в точке $x = 0$ не имеет определённого знака ни в какой окрестности этой точки

($\Delta g(0) < 0$ при $\Delta x < 0$, $\Delta g(0) > 0$ при $\Delta x > 0$). Следовательно, $g(x)$ не имеет экстремума при $x = 0$.

92. 1) Исследуем знак приращения функции $f(x)$ в точке $x = 0$:

$$\Delta f(0) = f(\Delta x) - f(0) = e^{-\frac{1}{|\Delta x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{\Delta x} \right) > 0$$

при всех $\Delta x \neq 0$, следовательно, функция $f(x)$ имеет при $x = 0$ строгий локальный минимум, равный $f(0) = 0$.

2) При $x > 0$ функция дифференцируема, поэтому для отыскания стационарных точек найдём производную y' :

$$y' = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = \frac{\sqrt{2}}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \sin \left(\frac{1}{x} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \geq 0,$$

причём производная обращается в нуль в отдельных точках, а справа и слева от них сохраняет положительный знак. Это означает, что при $x > 0$ функция не имеет локальных экстремумов. Аналогично, при $x < 0$ имеем

$$y' = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(-\sqrt{2} - \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(1 + \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \leq 0,$$

причём производная обращается в нуль в отдельных точках, и при переходе через них не меняет знак. Это означает, что и при $x < 0$ функция не имеет локальных экстремумов. Итак, других экстремальных значений, кроме $f_{\min} = f(0) = 0$, функция не имеет.

93. Рассмотрим приращение функции в точке $x = 0$: $\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x|(2 + \cos \frac{1}{\Delta x}) > 0$, следовательно, $f(0) = 0$ – локальный минимум.

Построим график. Функция $f(x)$ – чётная, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Найдём асимптоту $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\cos \frac{1}{x} - 1 \right) = \dots = 0,$$

т. е. $y = 3x$ – наклонная асимптота. Эскиз графика постройте самостоятельно.

94. Функция непрерывна. Раскрывая модули, получаем

$$f(x) = \begin{cases} -x e^{x-1}, & x \leq 0; \\ x e^{x-1}, & 0 \leq x \leq 1; \\ x e^{1-x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Дифференцируя внутри этих промежутков, находим

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{x-1}(1+x), & x < 0; \\ e^{x-1}(1+x), & 0 < x < 1; \\ e^{1-x}(1-x), & x > 1. \end{cases}$$

При $0 < x < 1$ уравнение $y' = 0$ не имеет решений; при $x > 1$ уравнение $y' = 0$ также не имеет решений; при $x < 0$ находим стационарную точку $x = -1$.

Итак, $x \in \{-1; 0; 1\}$ – критические точки. Исследуя знак производной в промежутках между этими точками, определяем, что $f(-1) = e^{-2}$ – локальный максимум, $f(0) = 0$ – локальный минимум, $f(1) = 1$ – локальный максимум.

95. Найдём корни квадратного трёхчлена: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1; 2$. Тогда $y(-10) = 132$ – наибольшее значение функции, $y(1) = y(2) = 0$ – её наименьшие значения (постройте эскиз графика).

96. Функция $f(x)$ может быть недифференцируема только в тех точках, где $3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 43 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(3x^3 - 19x^2 + 43x - 43) = 0$. Обозначим $g(x) = 3x^3 - 19x^2 + 43x - 43$. Тогда $g'(x) = 9x^2 - 38x + 43 > 0$ при всех x , т. е. $g(x)$ возрастает и $g(x) < 0$ при всех $x \in [-2, 3]$, так как $g(3) = -4$. Следовательно, $x = -1$ – единственная возможная точка недифференцируемости $f(x)$ на $[-2, 3]$. При $x < -1$ имеем $f'(x) = 12x(x - 2)^2$, при $x > -1$ имеем $f'(x) = -12x(x - 2)^2$, следовательно, критическими точками $f(x)$ на сегменте $[-2, 3]$ являются точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. Вычисляя значения $f(x)$ при $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, получаем $f(-2) = 229$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 43$, $f(2) = 27$, $f(3) = 16$, поэтому $\max_{x \in [-2; 3]} f(x) = f(-2) = 229$,

$$\min_{x \in [-2; 3]} f(x) = f(-1) = 0.$$

97. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 2]$. Раскрывая модуль, получим

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & x > 0; \\ -\sqrt{2-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Построив график этой кусочно непрерывной функции, определяем, что она возрастает при $x \in (-\infty, 0)$ и убывает при $x \in (0, 2]$. Конечной точной нижней грани у функции нет (функция не ограничена снизу), а точная верхняя грань равна $\sqrt{2}$ и при этом не достигается.

98. Функция чётная. Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{-2x \left(x - \sqrt{\sqrt{2}-1} \right) \left(x + \sqrt{\sqrt{2}-1} \right) (x^2 + 1 + \sqrt{2})}{(1 + x^4)^2},$$

откуда стационарные точки $x = 0$, $x = \pm \sqrt{\sqrt{2}-1}$. Нарисовав схему знакоопределённости производной, находим, что $f(\pm \sqrt{\sqrt{2}-1}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ – локальный максимум, $f(0) = 1$ – локальный минимум. Далее, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2}{1 + x^4} = 0$. Отсюда вытекает, что $\inf f(x) = 0$, $\sup f(x) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

99. Найдём первую производную и стационарные точки:

$$y' = -2\sqrt{2}xe^{-x^2} \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^2 = \pi n - \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Имеем $\sup f(x) = f(0) = 1$, так как при $x \neq 0$ $f(x) = e^{-x^2} \cdot \cos(x^2) \leq 1$.

Заметим, что функция чётная, следовательно, можно искать точную нижнюю грань при $x > 0$. Проверим точки $x_n^2 = \pi n - \frac{\pi}{4}$. Подставим эти значения в функцию:

$$f(x_n) = e^{\frac{\pi}{4} - \pi n} \cos\left(\pi n - \frac{\pi}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $n = 2k$, то $f(x_{2k}) = e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi k} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi k} > 0$.

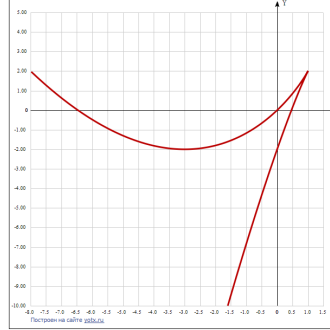
Если $n = 2k + 1$, то $f(x_{2k+1}) = e^{\frac{\pi}{4} - \pi(2k+1)} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4} - \pi(2k+1)} < 0$. Ясно, что точная нижняя грань совпадает с наименьшим из локальных минимумов. Эти минимумы отрицательны и монотонно возрастают при $n \rightarrow +\infty$. Поэтому точная нижняя грань равна первому из локальных минимумов, соответствующему $n = 1$, т. е. $\inf f(x) = f(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}}$.

100. Вычислим первую производную: $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$. Отсюда находим две критические точки: $x = \pm 1$. При этом при переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, а в самой точке непрерывна. Значит, в точке $x = -1$ функция имеет локальный минимум, равный $-\sqrt[3]{4}$. В силу нечётности функции, в точке $x = 1$ будет локальный максимум равный $\sqrt[3]{4}$.

101. Используя формулы понижения степени, преобразуем функцию:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2x) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x. \end{aligned}$$

Функция непрерывна и периодична с периодом $T = \frac{\pi}{2}$, поэтому достаточно найти экстремумы на отрезке $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Найдём стационарные точки: $y' = -\sin 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, при этом на отрезке $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ функция возрастает, а на $[0, \frac{\pi}{4}]$ — убывает. Поэтому в точке $x = 0$ функция имеет локальный максимум, равный 1, а в точках $x = \pm \frac{\pi}{4}$ — локальные минимумы, равные $\frac{1}{2}$. С учётом периодичности получаем ответ: в точках $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, имеются локальные максимумы, равные 1, а в точках $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ — локальные минимумы, равные $\frac{1}{2}$.

Рис. 28: Кривая $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

102. Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы, то для нахождения производной воспользуемся формулой:

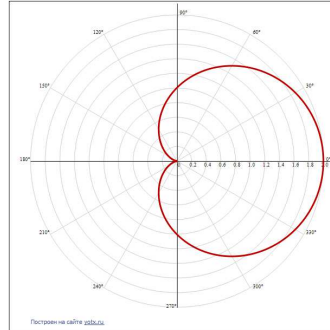
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3(1-t)(1+t)}{2(1-t)}.$$

Критических точек две: $t = \pm 1$. При этом в точке $t = 1$ (т. е. $x = 1$) производная имеет устранимый разрыв, причём существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} = 3$. Это означает, что в этой точке сходятся две ветви кривой, имеющие общую полукасательную (особая точка относится к точкам возврата 1 рода). Кроме того, в этой точке x принимает наибольшее возможное значение, равное 1. Это точка краевого максимума, равного 2. В точке $t = -1$ ($x = -3$, $y = -2$) имеется локальный минимум, так как в ней производная обращается в 0 и меняет знак с минуса на плюс. (Рис. 28).

103. В данном случае уравнение кривой выглядит проще в полярных координатах, поэтому исследование на экстремумы будем проводить там. Переходя к полярным координатам, получим при $r \neq 0$:

$$(r^2 - r \cos \varphi)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1 + \cos \varphi.$$

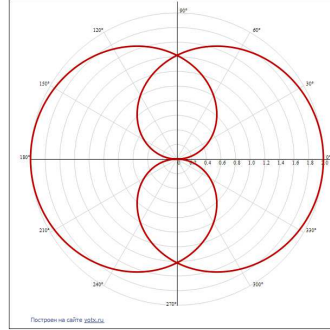
Это кардиоида (Рис. 29). Найдём производную: $r' = -\sin \varphi$ и точки возможного экстремума: $r' = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку кривая периодическая с периодом $T = 2\pi$, то достаточно найти экстремумы, например, на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. В него попадают две критические точки: $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. При этом при прохождении первой из точек производная меняет свой знак с плюса на минус, а во второй точке, наоборот, с минуса на плюс. Поэтому при $\varphi = 0$ кривая имеет локальный максимум, равный $r_{\max} = r(0) = 2$, а в точке $\varphi = \pi$ — локальный минимум, равный $r_{\min} = r(\pi) = 0$.

Рис. 29: Кардиоиды $r = 1 + \cos \varphi$.

104. а) Найдём область определения функции: $r \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in \left[\frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi(2n+1)}{3} \right]$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция периодична с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$, поэтому достаточно исследовать кривую на отрезке $[0, \frac{2\pi}{3}]$. Пересекая данный отрезок с областью определения функции, получаем, что функция определена в секторе $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$. Для нахождения локальных экстремумов в этом секторе вычислим производную $r'_\varphi = 3a \cos 3\varphi$ и, приравнявая её к нулю, находим стационарную точку $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Поскольку в этой точке производная меняет знак с плюса на минус, то это точка локального максимума. Подставляя $\varphi = \frac{\pi}{6}$ в функцию, находим сам локальный максимум, он равен a . При этом в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$ достигается наименьшее значение r , равное 0. Если с учётом периодичности (поворота вокруг полюса) нарисовать всю кривую, то увидим три лепестка (на каждом периоде – один «лепесток»): при $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$ – первый, при $\varphi \in [\frac{2\pi}{3}, \pi]$ – второй, при $\varphi \in [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ – третий.

б) В обобщённой полярной системе координат в секторе $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$ имеем $r \geq 0$ и кривая так же как и в предыдущем случае описывает первый «лепесток». Далее на отрезке $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ кривая определена, но переменная r принимает отрицательные значения, поэтому при прохождении этого сектора кривая оказывается в визуально противоположном секторе и описывает нижний (третий) «лепесток». Затем при $\varphi \in [\frac{2\pi}{3}, \pi]$ опять $r \geq 0$ и получаем второй «лепесток». После этого в секторе $\varphi \in [\pi, \frac{4\pi}{3}]$ имеем $r \leq 0$, поэтому кривая вновь проходит по первому из «лепестков». В итоге, при изменении φ от 0 до 2π кривая дважды описывает каждый из трёх «лепестков» (и внешне смотрится так же, как и в пункте а), состоящей из тех же 3-х «лепестков»).

105. Область определения задаётся неравенством $\cos 3\varphi > 0$, т. е. $\varphi \in (-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3})$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция периодична с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$, поэтому достаточно исследовать кривую на отрезке $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Пересекая данный отрезок с областью определения функции, получаем, что функция определена в секторе $\varphi \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Для нахождения локальных экстремумов в этом секто-

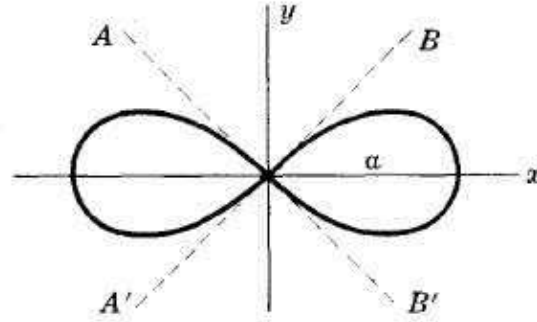
Рис. 30: Кривая $r = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$.

ре вычислим производную $r'_\varphi = \frac{3a \sin 3\varphi}{2\sqrt{\cos^3 3\varphi}}$ и, приравнявая её к нулю, находим стационарную точку $\varphi = 0$. Поскольку в этой точке производная меняет знак с минуса на плюс, то это точка локального минимума. Подставляя $\varphi = 0$ в функцию, находим сам локальный минимум, он равен a . При этом при $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{6} + 0$ и $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{6} - 0$ имеем $r \rightarrow +\infty$, то есть лучи $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$ являются асимптотами кривой.

106. Найдём область определения: $r \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in [4\pi n, 2\pi + 4\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция периодична с периодом $T = 4\pi$. Исследуем кривую на одном из периодов, например, при $\varphi \in [0, 4\pi]$. Функция определена на подсегменте $\varphi \in [0, 2\pi]$. Найдём производную $r'_\varphi = \cos \frac{\varphi}{2}$ и стационарную точку, принадлежащую этому отрезку: $r'_\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pi$. При этом при $\varphi \in [0, \pi]$ величина r возрастает, а при $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ — убывает. Поэтому в точке $\varphi = \pi$ имеется локальный максимум, равный $r_{\max} = r(\pi) = 2$, а в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ функция $r(\varphi)$ достигает наименьшего значения, равного $r_{\min} = r(0) = 0$.

Замечание. При построении этой кривой в обобщённой полярной системе координат к полученному участку кривой добавится кривая, симметричная этому участку относительно лучей $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ (Рис. 30).

107. Найдём область определения данной кривой: $a \cos 2\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in [-\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Вычислим производную $r' = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{a \cos 2\varphi}}$. Кривая периодична с периодом $T = \pi$, поэтому достаточно исследовать кривую на любом участке длины π , например, на отрезке $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. При этом кривая определена только при $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Найдём стационарные точки, попадающие на данный сегмент: $r' = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$. Так как в этой точке производная меняет знак с минуса на плюс, то это точка локального максимума. В точках $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ производная r' не существует, а переменная r принимает своё наименьшее значение, равное 0 (Рис. 31).

Рис. 31: Лемниската Бернулли $r = \sqrt{a \cos 2\varphi}$.

108. Данная кривая более узнаваема, если переписать её уравнение в прямоугольных координатах. В самом деле, поскольку $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то имеем:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = x + 3$$

$$4(x^2 + y^2) = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 3(x - 1)^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Это уравнение эллипса с центром в точке $(1, 0)$ и полуосями $a = 2$ и $b = \sqrt{3}$. Определите самостоятельно экстремальные точки данной кривой как в прямоугольной, так и в полярной системах координат.

109. Используя формулы перехода $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, получим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{9}{4 - \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 + y^2} = 5x + 9 \Leftrightarrow$$

$$16(x^2 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81 \Leftrightarrow \frac{(x + 5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Это правая ветвь гиперболы с центром в точке $(-5, 0)$, действительной полуосью $a = 4$ и мнимой полуосью $b = 3$. В обобщённой полярной системе координат данное уравнение определяет полную гиперболу (обе ветви, Рис. 32).

110. Используя формулы перехода $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, получим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4}{1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - y \Leftrightarrow$$

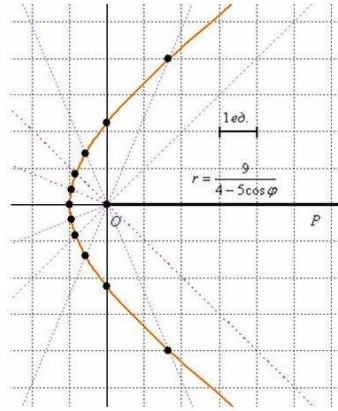


Рис. 32: Гипербола $r = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}$.

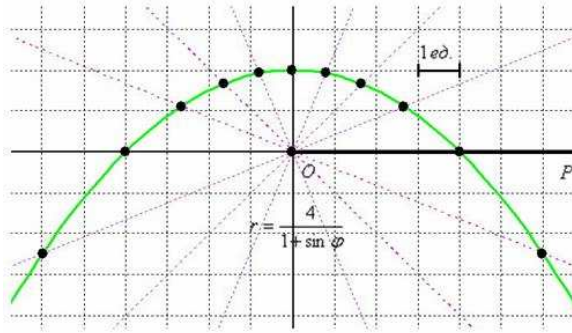


Рис. 33: Парабола $r = \frac{4}{1 + \sin \varphi}$.

$$x^2 + y^2 = 16 - 8y + y^2 \Leftrightarrow x^2 = -8(y - 2).$$

Это парабола (Рис. 33).

111. Пусть $f(x) = |3x - x^3|$, тогда $f'(x) = 3(1 - x)(1 + x) = 0$, критические точки $x = \pm 1$. Наибольшее значение непрерывной на сегменте функции достигается в экстремальных точках внутри сегмента или на его концах. Так как $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$, $f(-2) = 2$, $f(2) = -2$, то $\max_{|x| \leq 2} |f(x)| = 2$, откуда следует доказываемое неравенство.

112. 1-й способ. Функция $f(x) = x^p + (1 - x)^p$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и в силу теоремы Вейерштрасса достигает на нём своих точных граней, совпадающими с наименьшим и наибольшим значениями функции. Чтобы найти последние, вычислим производную $f'(x) = p(x^{p-1} - (1 - x)^{p-1})$, которая обращается в нуль в точке $x = \frac{1}{2}$. Сравнивая числа $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}}$, $f(1) = 1$,

находим, что $\max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 1$, а $\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = \frac{1}{2^{p-1}}$.

2-й способ (для левого неравенства). Докажем левое неравенство с помощью неравенства Йенсена. Функция $f(x) = x^p$ при $p > 1$ выпукла вниз на сегменте $[0, 1]$, поэтому $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Положим в последнем неравенстве $x_1 = x$, $x_2 = 1 - x$ и получим

$$f\left(\frac{x + (1-x)}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(1-x)}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p.$$

3-й способ (для правого неравенства). Воспользуемся тем, что при $x \in [0, 1]$ верно $x^p \leq x$, $(1-x)^p \leq 1-x$, поэтому $x^p + (1-x)^p \leq 1$.

4-й способ (для левого неравенства). Докажем левое неравенство с помощью свойств среднего степенного: поскольку среднее степенное $V_p(a, b) = \left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}$ есть возрастающая по порядку p функция ($p \in \mathbb{R}$), то $V_1 \leq V_p$ при $p > 1$. Выбрав в качестве a и b числа x и $1-x$, получим

$$V_1 = \frac{x + (1-x)}{2} \leq \left(\frac{x^p + (1-x)^p}{2}\right)^{1/p} = V_p \quad (p > 1),$$

$$\frac{1}{2} \leq \left(\frac{x^p + (1-x)^p}{2}\right)^{1/p} \Leftrightarrow \frac{1}{2^p} \leq \frac{x^p + (1-x)^p}{2}.$$

113. Положим $f(x) = x^m(a-x)^n$ и, используя производную, найдём локальный максимум функции внутри сегмента. Получим, что наибольшее значение функции равно $\max_{0 \leq x \leq a} f(x) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} \cdot a^{m+n}$ и достигается при $x = \frac{ma}{m+n}$.

114. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, она дифференцируема на сегменте $[0, 1]$, причём $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, и на интервале $(0, 1)$ эта функция $\varphi(x)$ имеет единственную стационарную точку $x = \frac{2}{3}$. Следовательно,

$$\Delta = \max \{|\varphi(0)|; |\varphi(1)|; |\varphi(\frac{2}{3})|\} = |\varphi(\frac{2}{3})| = \frac{4}{27}.$$

115. Для определённости предположим, что в точке x_0 функция $f(x)$ достигает локального максимума. Тогда существует такое $\delta > 0$, что для любого x из окрестности $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$. Так как $f(x) \geq 0$ и $C > 0$, то из последнего неравенства следует неравенство $Cf^2(x) < Cf^2(x_0)$, т. е. $F(x) < F(x_0)$, а значит, в точке x_0 функция $F(x)$ имеет локальный максимум. Аналогично в случае с локальным минимумом.

116. 1) Пусть в точке x_0 достигается локальный максимум функции $f(x)$. Докажем, что тогда $\varphi(f(x))$ также имеет в этой точке локальный максимум. В самом деле, при всех x из некоторой окрестности $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0) = f_0$. Так как функция φ монотонно возрастает в

строгом смысле, то из неравенства $f < f_0$ следует неравенство $\varphi(f) < \varphi(f_0)$, что и требовалось доказать.

2) Докажем обратное утверждение. Пусть теперь в точке x_0 функция $\varphi(f(x))$ достигает локального максимума. Это означает, что в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $\varphi(f(x)) < \varphi(f(x_0))$. В силу возрастания функции φ получаем, что в указанной окрестности справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$, а это, в свою очередь, означает, что функция $f(x)$ также достигает максимума в точке x_0 .

117. Имеем $f(-x) = f(x) \Rightarrow -f'(-x) = f'(x)$, откуда $f'(0) = 0$. Далее, по формуле Тейлора имеем $f(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$, откуда видно, что при $f''(0) > 0$ точка $x = 0$ есть точка локального минимума, а при $f''(0) < 0$ — точка локального максимума.

118. Пусть x и y — стороны прямоугольника, тогда $S = xy$, а минимизировать нужно $P = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$. Найдём стационарные точки: $P' = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right) = 0$, т. е. $x^2 = S = xy$. Итак, периметр будет наименьшим в случае квадрата $x = y = \sqrt{S}$.

119. Пусть x и y — длины полусторон прямоугольника. Тогда $S = 4xy$, причём x и y — координаты точки, лежащей на эллипсе в первой четверти (сделайте рисунок).

1-й способ (сведение к задаче максимизации явно заданной функции). Из неявного уравнения выразим явно $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, тогда

$$S(x) = 4x \cdot b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \Rightarrow S'(x) = \frac{4b}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

С учётом перемены знака производной делаем вывод, что в данной точке $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ($y = \frac{b}{\sqrt{2}}$) функция имеет локальный максимум, равный $2ab$.

2-й способ. Воспользуемся параметрическими уравнениями эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Тогда $S = 2ab \sin 2t \leq 2ab$ ($t \in [0, \frac{\pi}{2}]$), причём наибольшее значение, равное $2ab$, достигается, если $t = \frac{\pi}{4}$, при этом $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

3-й способ. Выпишем очевидное неравенство $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 2 \cdot \frac{xy}{ab}$, откуда получаем оценку $xy \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{ab}{2}$, причём нера-

венство обращается в равенство $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. Решая систему $xy = \frac{ab}{2}, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, находим $x = \frac{a}{\sqrt{2}}, y = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

120. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит окружности, обозначим $r = |MA|$. Имеем

$$r^2 = (x - 2)^2 + (y - 0)^2 = x^2 - 4x + 4 + (1 - x^2) = 5 - 4x.$$

Поэтому $\max_{-1 \leq x \leq 1} r^2 = r^2(-1) = 9$; $\min_{-1 \leq x \leq 1} r^2 = r^2(1) = 1$. Ответ: $r_{\max} = 3, r_{\min} = 1$.

121. Найдём уравнение касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0) . Без ограничения общности можно считать, что $x_0 > 0, y_0 > 0$. Имеем

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) =$$

$$(\text{так как } x = a \cos t, y = b \sin t, \text{ то } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b \cos t}{-a \sin t})$$

$$= y_0 - \frac{b \cos t_0}{a \sin t_0}(x - x_0) = y_0 - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0),$$

т. е. $\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}x + y = \frac{y_0^2 a^2 + b^2 x_0^2}{a^2 y_0}$. Поскольку $y_0^2 a^2 + b^2 x_0^2 = a^2 b^2$, то получаем уравнение $\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}x + y = \frac{b^2}{y_0}$. Приведём это уравнение прямой линии к виду «в отрезках на координатных осях»:

$$\frac{x}{a^2/x_0} + \frac{y}{b^2/y_0} = 1.$$

(Можно было просто найти точки пересечения касательной с координатными осями, положив сначала $x = 0$, а потом $y = 0$). Итак, касательная отсекает от координатных осей отрезки длины a^2/x_0 и b^2/y_0 . Следовательно, площадь треугольника

$$S = \frac{a^2 b^2}{2x_0 y_0} = \frac{a^2 b^2}{2a \cos t_0 \cdot b \sin t_0} = \frac{ab}{\sin 2t_0}.$$

Рассмотрим функцию $S(t) = \frac{ab}{\sin 2t}$, $S'(t) = -\frac{2 \cos 2t}{\sin^2 2t} = 0$, откуда с учётом $x_0 > 0, y_0 > 0$ находим $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Тогда $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}, y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$, и уравнение касательной можно записать в виде $\frac{x}{\sqrt{2}a} + \frac{y}{\sqrt{2}b} = 1$, или $y = b\sqrt{2} - \frac{b}{a}x$.

122. Пусть α – центральный угол оставшегося сектора. Объём конуса: $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}}h$. Длина окружности воронки равна $2\pi R \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = R\alpha$. Пусть r – радиус воронки, высота конуса $h = \sqrt{R^2 - r^2}$, $S_{\text{осн.}} = \pi r^2$, но так как

$2\pi r = R\alpha$, то $r = \frac{R\alpha}{2\pi}$ и $S_{\text{осн.}} = \pi \frac{R^2\alpha^2}{4\pi^2}$. Тогда $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2\alpha^2}{4\pi^2} \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R^3}{24\pi^2} \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$.

Исследуем функцию $V(\alpha) = \frac{R^3}{24\pi^2} \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$ на экстремум. Заметим, что вместо этого можно исследовать на экстремум квадрат функции $\tilde{V}(\alpha) = \alpha^4(4\pi^2 - \alpha^2)$, так как экстремальная точка у них одна и та же. В результате получим, что максимум достигается при $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

123. Постройте эскиз графика. Непрерывная функция $P(x)$ менее всего отклоняется (по модулю) от нуля (оси Ox), если $P(0) = -P(\pm 1)$, т. е. $q = -(1+q)$, откуда находим $q = -\frac{1}{2}$.

124. Раскрывая модули, получим

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -1; \\ x+2, & -1 \leq x \leq 1; \\ 3x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Построив график этой кусочно линейной функции (он представляет собой трёхзвенную ломаную), увидим, что функция имеет единственный локальный минимум, равный 1, в точке $x = -1$.

125. Нарисовав на отрезке $[0, 1]$ все три графика, определим точки их попарного пересечения. Эти точки $\{\frac{3}{5}; \frac{3}{4}\}$ разбивают отрезок на три части, на каждой из которых выбираем тот из графиков, который лежит ниже других. Объединяя отобранные участки, получаем график непрерывной функции (в виде ломаной линии):

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & 0 \leq x \leq \frac{3}{5}; \\ \frac{x}{3}, & \frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{4}; \\ 1-x, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

откуда находим, что $\sup_{x \in [0, 1]} f(x) = f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$.

126. Имеем: $f(x) = ((x-1)(x-4))((x-2)(x-3)) + 10 = (x^2 - 5x + 4) \cdot (x^2 - 5x + 6) + 10$. Положим $t = x^2 - 5x + 5$, тогда функция примет вид $(t-1)(t+1) + 10 = t^2 + 9$. Итак, $f(x) = (x^2 - 5x + 5)^2 + 9 \geq 9$, причём наименьшее значение, равное 9, достигается тогда и только тогда, когда $x^2 - 5x + 5 = 0$, т. е. при $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

127. Делением многочлена на многочлен приведём функцию к виду

$$y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1} \geq 2$$

(в силу неравенства о сумме двух взаимно обратных положительных чисел). Тогда минимум функции равен 2 и достигается при условии $x^2 + x + 1 = 1$, т. е. при $x = 0$ и $x = -1$.

128. Положим $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда функция примет вид

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t \cdot \sqrt{\cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t \cdot |\cos t|.$$

Так как $\cos t \geq 0$ на рассматриваемом отрезке, то модуль раскрывается положительно и функция принимает вид $y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin 2t$. Так как при $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ верна оценка

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin 2t \leq \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

то точная верхняя грань (наибольшее значение функции) равна $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (достигается при $t = \frac{\pi}{4}$, т. е. $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$).

129. Переформулируем задачу в виде: «При каких y уравнение имеет решения?» Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y + x \geq 0, \\ (y + x)^2 = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + x \geq 0, \\ x = \frac{2-y^2}{2y+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \frac{2-y^2}{2y+3} \geq 0, \\ x = \frac{2-y^2}{2y+3}. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим все возможные значения y : $y \in [-2, -\frac{3}{2}) \cup [-1, +\infty)$. Так как функция не ограничена сверху, то конечный $\sup y$ не существует, при этом $\inf y = -2$.

130. Справедлива оценка: $\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x} = \frac{4 \cdot 9^x}{(2 \cdot 2^x - 3^x)^2 + 3 \cdot 9^x} \leq \frac{4}{3}$, из которой непосредственно следует, что наибольшее значение функции равно $\frac{4}{3}$, причём достигается тогда и только тогда, когда $2 \cdot 2^x - 3^x = 0$, т. е. при $x = \log_{\frac{3}{2}} 2$.

131. Преобразуем функцию к виду

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}} \right) + (\sqrt{x+1} - 1) = \frac{\sqrt{1+x}+1}{x} + \\ &+ \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x}+1} \geq 2, \end{aligned}$$

причём точная нижняя грань достигается тогда и только тогда, когда $\frac{\sqrt{1+x}+1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

132. На данном отрезке числа $1-x$, $1+2x$, $1+x$ неотрицательны. Воспользуемся неравенством Коши для 8 чисел:

$$(1-x)^5(1+2x)^2(1+x) \leq \left(\frac{5(1-x) + 2(1+2x) + (1+x)}{8} \right)^8 = 1,$$

причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $1 - x = 1 - 2x = 1 + x$, т. е. при $x = 0$. Таким образом, наибольшее значение функции на указанном отрезке равно 1.

133. Выделяя полный квадрат, преобразуем функцию к виду:

$$f(x) = \frac{1}{8}(x + 4 \cos x)^2 - 1.$$

Так как выражение в скобках может обращаться в нуль (существование решения у уравнения $\cos x = -\frac{x}{4}$ можно обосновать графически), то точная нижняя грань достигается и равна (-1) .

134. Имеем: $f(x) = (2^x + ax)^2 \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Наименьшим значением функции будет 0, при условии, что уравнение $2^x = -ax$ имеет решение. В этом можно убедиться, например, графически. Покажем другим способом, что графики этих непрерывных функций пересекутся. В самом деле, обозначим $g(x) = 2^x$, $h(x) = -ax$. Тогда $g(0) = 1 > 0 = h(0)$, в то время как $g(-\frac{1}{a}) = \frac{1}{2^a} < 1 = h(-\frac{1}{a})$, откуда следует утверждение.

135. Функция $f(x)$ определена на $[5, 7]$ тогда и только тогда, когда квадратный трёхчлен $g(x) = x^2 - 4x + a$ не имеет корней на этом отрезке. Так как график $g(x)$ – парабола с ветвями вверх и вершиной в точке $x = 2$ (левее отрезка $[5, 7]$), то $g(x)$ не будет иметь корней на $[5, 7]$, если

$$g(5) \cdot g(7) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (5 + a)(21 + a) > 0,$$

т. е. при $a \in (-\infty, -21) \cup (-5, +\infty)$. Далее, $g(x)$ является на $[5, 7]$ строго возрастающей функцией, следовательно, $f(x)$ на $[5, 7]$ является строго убывающей. Значит, требование задачи будет выполнено, если

$$f(5) \leq \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5 + a} \leq \frac{1}{10},$$

откуда $a \in (-\infty, -5) \cup [5, +\infty)$. Находя пересечение этих двух множеств, получаем ответ: $a \in (-\infty, -21) \cup [5, +\infty)$.

4 СЕМИНАР*: Нахождение асимптот, осей и центров симметрии графиков. Периодичность. Особые точки кривых.

«Славяне должны работать на нас, а в случае, если они нам больше не нужны, пусть умирают. Прозвишки и охрана здоровья для них излишни.

Славянская плодovitость нежелательна . . . образование опасно. Достаточно, если они будут уметь считать до ста. . . Каждый образованный человек — это наш будущий враг. Следует отбросить все сентиментальные возражения. Нужно управлять этим народом с железной решимостью. . . Говоря по-военному, мы должны убивать от трёх до четырёх миллионов русских в год».

Из директивы А. Гитлера (1889–1945, немецкий государственный и политический деятель, основатель тоталитарной диктатуры нацистской Германии, рейхсканцлер, фюрер и верховный главнокомандующий вооружёнными силами Германии) министру по делам восточных территорий А. Розенбергу о введении в действие Генерального плана «Ост» (23 июля 1942 г.)

«В следующем году мы окончательно завоюем и те территории Европейской России, которые остались ещё не занятыми. . . Принципиальная линия для нас абсолютно ясна — этому народу не надо давать культуру. Я хочу здесь повторить слово в слово то, что сказал мне фюрер. Вполне достаточно: во-первых, чтобы дети в школах запомнили дорожные знаки и не бросались под машины; во-вторых, чтобы они выучили таблицу умножения, но только до 25; в-третьих, чтобы они научились подписывать свою фамилию.

Больше им ничего не надо. . . »

Г. Гиммлер (1900–1945), один из главных деятелей Третьего рейха, нацистской партии и рейхсфюрер СС. Занимал должности рейхсминистра внутренних дел, рейхслайтера. Причастен к совершению нацистских преступлений, входит в число главных организаторов Холокоста.

Данная тема не выделена в программе курса в отдельный семинар, однако с этим материалом необходимо ознакомиться для грамотного решения задач следующих двух семинаров (и обоснования решений). Рекомендуется ознакомление с теорией и выборочное решение задач.

С целью защиты авторских прав
НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

4.1 Асимптоты в декартовых и полярных координатах

Обратимся к вопросу о том, что такое асимптоты, какими они бывают и как их вычислить в прямоугольных и полярных координатах.

4.1.1 Асимптоты в декартовых координатах

Пусть в декартовой системе координат имеется явно заданная функция одной действительной переменной $y = f(x)$ и требуется выяснить, существуют ли асимптоты у графика этой функции. Заметим, что если график имеет асимптоты, то его построение удобно начинать с изображения асимптот. Приведём соответствующие определения (классификацию асимптот).

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* для графика функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке $x = a$ равен бесконечности (с любым знаком). Для нахождения вертикальных асимптот определяют точки бесконечного разрыва кривой (точки разрыва второго рода).

Пусть функция $y = f(x)$ определена при $x \in [a, +\infty)$. Прямая $y = k_1x + b_1$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если при достаточно больших положительных значениях x функция представима в виде

$$f(x) = k_1x + b_1 + \alpha(x), \quad \text{где } \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (1)$$

Если угловой коэффициент k_1 наклонной асимптоты оказался равным нулю, то асимптоту называют *горизонтальной*.¹

Функция, определённая при $x \in (-\infty, a]$ также может иметь вторую наклонную асимптоту $y = k_2x + b_2$ при $x \rightarrow -\infty$.

Иначе говоря, асимптота – это линия, к которой бесконечно приближается ветвь графика функции. Может ли кривая пересекать асимптоту? Да, может.

Пример 71. График функции $y = \frac{\sin x}{x}$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ горизонтальную асимптоту $y = 0$ (Рис. 34), но при этом пересекает её в бесконечном числе точек. $\square$

Нахождение асимптот в случае явного задания функции. Разделив равенство (1) на x и перейдя к пределу при $x \rightarrow +\infty$, получим очевидную

¹Для того чтобы прямая $y = b$ была горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (при $x \rightarrow -\infty$), необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (соответственно, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$).

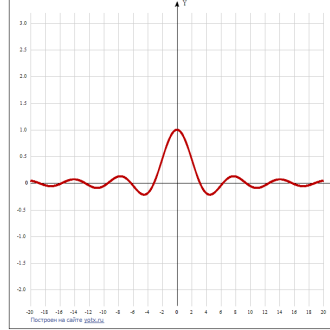


Рис. 34: Кривая $y = \frac{\sin x}{x}$

формулу для вычисления углового коэффициента:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (2)$$

Если этот предел существует и конечен, найдём второй из коэффициентов. Переписав для этого равенство (1) в виде $f(x) - k_1x = b_1 + \alpha(x)$ и устремив x к $+\infty$, получим

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1x). \quad (3)$$

Если и этот предел существует и конечен, то асимптота найдена и осталось подставить вычисленные значения коэффициентов в уравнение асимптоты: $y = k_1x + b_1$.

Вертикальная асимптота часто встречается у дробно-рациональных функций в точках, где знаменатель равен нулю, а числитель при этом в нуль не обращается (т. е. в точках разрыва второго рода). Функции, которые являются непрерывными на всем множестве действительных чисел, вертикальных асимптот не имеют.

Пример 72. Найти асимптоты графика функции

$$y = x + \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Вертикальных асимптот, очевидно, нет. Выясним, имеется ли наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x + \operatorname{arctg} x) - x) = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, асимптота существует и её уравнение: $y = x + \frac{\pi}{2}$. Аналогично находится асимптота при $x \rightarrow -\infty$: $y = x - \frac{\pi}{2}$. $\square$

При нахождении наклонных асимптот возможно также использование формулы Тейлора (на промежутке). Рассмотрим пример.

Пример 73. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^3}{2(x-2)^2}.$$

Решение. Преобразуем функцию в окрестности бесконечно удалённой точки:

$$y = \frac{x^3}{2(x-2)^2} = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-2} = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x}{2} + 2 + o(1) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Отсюда непосредственно следует, что $y = \frac{x}{2} + 2$ – наклонная (двусторонняя) асимптота к графику данной функции при $x \rightarrow \infty$. $\square$

Нахождение асимптот в случае параметрического задания функции. В случае, когда плоская кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, формулы (2)–(3) адаптируются к виду

$$k_1 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad b_1 = \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - k_1 x(t)).$$

Здесь значение t_0 (конечное число или символ бесконечности), в окрестности которого возможно наличие асимптот, находится из тех соображений, что при $t \rightarrow t_0$ либо $x(t)$, либо $y(t)$, либо обе функции одновременно являются бесконечно большими.

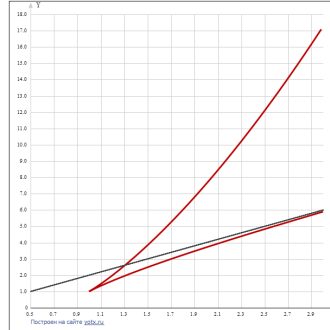
Пример 74. Найти асимптоты у кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = t + e^{-t}, \\ y = 2t + e^{-2t}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Решение. Асимптоты возможны при тех значениях параметра, при которых $x \rightarrow \pm\infty$ или $y \rightarrow \pm\infty$, т. е. в данном случае при $t \rightarrow \pm\infty$. Рассмотрим отдельно эти случаи. Пусть $t \rightarrow +\infty$ (т. е. $x \rightarrow +\infty$), ищем асимптоту в виде $y = k_1 x + b_1$:

$$k_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} = 2,$$

$$b_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - k_1 x(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} ((2t + e^{-2t}) - 2(t + e^{-t})) = 0,$$


 Рис. 35: Кривая $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

т. е. имеется наклонная асимптота $y = 2x$. Пусть теперь $t \rightarrow -\infty$, ищем асимптоту в виде $y = k_2x + b_2$:

$$k_2 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} = +\infty,$$

но это означает, что второй асимптоты нет (Рис. 35). $\square$

Нахождение асимптот в случае неявного задания функции. Если плоская кривая задана неявным уравнением, то для нахождения её асимптот рекомендуется попытаться привести уравнение к явному виду (если это возможно), параметризовать кривую или перейти к полярным координатам. В некоторых случаях можно воспользоваться определением асимптоты.

Пример 75. Найти асимптоты кривой, заданной неявно уравнением $\operatorname{tg} y = x$.

Решение. Найдём явно зависимость y от x : $y = \operatorname{arctg} x + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Кривая состоит из бесконечного числа ветвей с горизонтальными асимптотами $y = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Пример 76. Найти асимптоты при $x \rightarrow \pm\infty$ неявно заданной функции $y(x)$

$$8x^3 + y^3 - 6xy - 3 = 0.$$

Решение. Согласно определению, будем искать наклонную асимптоту неявной функции $y(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ в виде $y = kx + b$, где

- 1) $\frac{y(x)}{x} \rightarrow k$ при $x \rightarrow +\infty$ (или $y(x) = kx + o(x)$);
- 2) $y(x) - kx \rightarrow b$ при $x \rightarrow +\infty$ (или $y(x) = kx + b + o(1)$).

Подставим вначале в уравнение вместо y выражение $kx + o(x)$, что позволит нам найти k :

$$8x^3 + (kx + o(x))^3 - 6x(kx + o(x)) - 3 = 0,$$

или

$$(8 + k^3)x^3 + (3k^2x^2o(x) + 3kx(o(x))^2 + (o(x))^3 - 6kx^2 - 6xo(x) - 3) = 0.$$

Заметим, что при $x \rightarrow +\infty$ все слагаемые, кроме первого, есть $o(x^3)$, т. е. асимптотически уравнение имеет вид $(8 + k^3)x^3 + o(x^3) = 0$. Отсюда находим единственно возможное $k = -2$.

Для нахождения b подставим в уравнение $y(x) = -2x + b + o(1)$ и получим следующий асимптотический вид уравнения:

$$8x^3 + (-2x + b + o(1))^3 - 6x(-2x + b + o(1)) - 3 = 0,$$

или

$$(12b + 12)x^2 + o(x^2) = 0.$$

Значит, $b = -1$. Итак, уравнение асимптоты имеет вид $y = -2x - 1$. Заметим, что при $x \rightarrow -\infty$ уравнение асимптоты не изменится. $\square$

4.1.2 Асимптоты в полярных координатах

Возможны следующие способы поиска асимптот.

1. Уравнение кривой переводят в прямоугольные координаты, и там же ищутся асимптоты. В полярном уравнении кривой осуществляется переход к совмещённой прямоугольной системе координат (к переменным x и y), и затем асимптоты ищутся в прямоугольных координатах согласно стандартным правилам.

Пример 77. Найти асимптоты кривой $r = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}$.

Решение. Используя формулы $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, перейдём к прямоугольным координатам:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{9}{4 - \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 + y^2} = 5x + 9 \Leftrightarrow$$

$$16(x^2 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81 \Leftrightarrow \frac{(x + 5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Стало ясно, что это правая ветвь гиперболы с центром в точке $(-5, 0)$, действительной полуосью $a = 4$ и мнимой полуосью $b = 3$ (Рис. 32). В обобщённой полярной системе координат с $r \in \mathbb{R}$ данное уравнение определяет полную гиперболу, т. е. обе ветви. Асимптоты найдите самостоятельно. $\square$

2. Уравнение кривой остаётся записанным в полярной системе координат, но асимптота ищется в виде $y = kx + b$. Все виды прямолинейных асимптот можно описать в совмещённой полярной системе координат. Так, наклонную асимптоту $y = kx + b$ для кривой $r = r(\varphi)$ стоит искать в тех

точках $\varphi = \varphi_0$, где хотя бы один из односторонних пределов $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0 \pm 0} r(\varphi)$ равен бесконечности.¹

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* к кривой $r = r(\varphi)$ при $\varphi \rightarrow \varphi_0$, если в окрестности точки φ_0 функция $r(\varphi)$ представима в виде $r(\varphi) = kr \cos \varphi + b + \alpha(\varphi)$, где $\alpha(\varphi) \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow \varphi_0$ (по мере приближения к лучу $\varphi = \varphi_0$ точка кривой удаляется в бесконечность). При этом коэффициенты k, b асимптоты предполагаются конечными и находятся по формулам

$$k = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0 \pm 0} \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi_0, \quad b = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0 \pm 0} (r \sin \varphi - kr \cos \varphi).$$

Горизонтальную асимптоту $\varphi = 0$ (или $\varphi = \pi$) ищут в точках, где хотя бы один из пределов $\lim_{\varphi \rightarrow 0 \pm 0} r(\varphi)$ (или $\lim_{\varphi \rightarrow \pi \pm 0} r(\varphi)$) равен бесконечности и где $k = \lim_{\varphi \rightarrow 0 \pm 0} \operatorname{tg} \varphi = 0$. Если $b = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0 \pm 0} (r \sin \varphi - kr \cos \varphi)$ есть конечное число, то уравнение горизонтальной асимптоты есть $r = \frac{b}{\sin \varphi}$.

Если один из пределов $\lim_{\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} \pm 0} r(\varphi)$ равен бесконечности и хотя бы один из пределов $\lim_{\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} \pm 0} (r \cos \varphi)$ равен постоянной b , то прямая $r = \frac{b}{\cos \varphi}$ есть *вертикальная асимптота*.

3. Поиск асимптот в полярной системе координат. Во многих ситуациях бывает удобнее, оставаясь в полярных координатах, искать асимптоты, являющиеся в некотором смысле аналогами асимптот в прямоугольных координатах, но характерные для полярных координат. Если в прямоугольных координатах выделяют асимптоты вертикальные, наклонные и горизонтальные (как частный случай наклонных), то в полярной системе координат есть множество кривых с радиальными асимптотами. Радиальная асимптота – это луч $\varphi = \varphi_0$ такой, что $\lim_{\varphi \rightarrow \pm \varphi_0} r(\varphi) = +\infty$. Рассмотрим пример.

Пример 78. Найти асимптоты кривой $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ ($a > 0$).

Область определения: $\cos 3\varphi > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} < \varphi < \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. С учётом периодичности с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$ получаем, что достаточно исследовать кривую на одном периоде, например интервале $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$. Пересекая с областью определения, находим, что на указанном интервале кривая определена лишь при $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$. Заметим, что при $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{6} + 0$ и при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{6} - 0$ величина r стремится к $+\infty$. Значит, лучи $\varphi = \pm \frac{\pi}{6}$ являются асимптотами данной кривой (Рис. 36). $\square$

¹В уравнении асимптоты можно перейти к полярным координатам: $r \sin \varphi = kr \cos \varphi + b$.

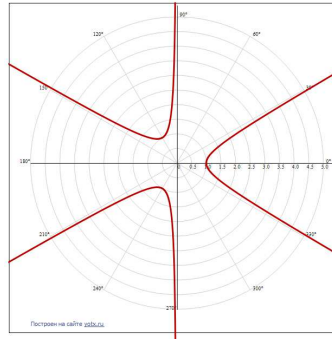


Рис. 36: Кривая $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ ($a > 0$).

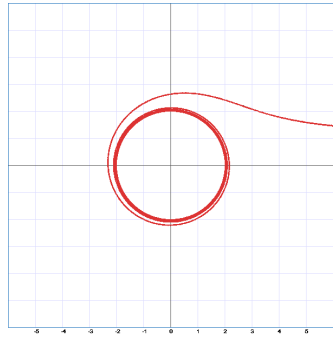


Рис. 37: Кривая $r = 2 + \frac{1}{\varphi}$, $\varphi > 0$.

Бывают и другие виды асимптот. Так, к характерным и естественным в полярных координатах видам криволинейных асимптот относят круговые асимптоты. Пусть для заданной кривой $r = r(\varphi)$ существует конечный предел $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} r(\varphi) = r_0$. Тогда окружность $r = r_0$ является *круговой асимптотой* данной кривой.

Пример 79. Найти асимптоты кривой $r = 2 + \frac{1}{\varphi}$, $\varphi > 0$.

Решение. У данной кривой имеются две асимптоты: прямолинейная (радиальная) в виде луча $\varphi = 0$ (при $\varphi \rightarrow +0$), а также круговая асимптота $r = 2$ (при $\varphi \rightarrow +\infty$) (Рис. 37). $\square$

Остановимся подробнее на понятии криволинейных асимптот.

4.1.3 Криволинейные асимптоты

Помимо прямолинейных асимптот иногда интерес представляют их обобщения – криволинейные асимптоты. Примером такой асимптоты может служить круговая асимптота в полярных координатах. Приведём более общее определение.

В прямоугольной системе координат кривая $y = g(x)$ называется (*криволинейной*) *асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$), если функция $f(x)$ при достаточно больших положительных x может быть представлена в виде

$$f(x) = g(x) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow +\infty$ функция. Аналогично формулируется определение криволинейной асимптоты в полярных координатах.

Пример 80. Например, график функции $y = 3x^2 - \frac{5}{x}$ имеет при $x \rightarrow \infty$ параболическую асимптоту $y = 3x^2$, так как $y = 3x^2 - \frac{5}{x} = 3x^2 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = -\frac{5}{x} \rightarrow 0$. $\square$

Поиск асимптот следует осуществлять в той системе координат, в которой это делать удобнее.

4.2 Нахождение осей и центров симметрии графиков

*«Образование ума не даёт.
Оно даёт знания».*

Александр Артамонов (род. 1968 г.), военный эксперт.

Обратимся к вопросу о симметрии кривых на плоскости в разных системах координат. Простейшими видами симметрии плоских кривых (фигур) являются центральная и осевая симметрии. Напомним эти определения.

Две точки A и A' называются *симметричными относительно точки O* , если O – середина отрезка AA' . Точка O считается симметричной самой себе и называется *центром* симметрии. Преобразование фигуры F в фигуру F' , при котором каждая её точка переходит в точку, симметричную относительно данной точки, называется *преобразованием симметрии относительно точки O* . Точка O называется *центром симметрии*.

Точка M' называется симметричной точке M *относительно прямой l* , если прямая MM' перпендикулярна прямой l и $|MO| = |OM'|$, где O – точка пересечения прямых MM' и l . Преобразование фигуры F в фигуру F' , при котором каждая её точка переходит в точку, симметричную относительно данной прямой, называется *преобразованием симметрии относительно прямой l* . Прямая l называется *осью симметрии*.

4.2.1 Симметрия кривых в декартовых координатах

Осевая и центральная симметрия графиков функций одной действительной переменной. Опираясь на понятия симметрий, введём определения оси и центра симметрии для графика функции одной переменной.

Прямая $x = a$ называется *осью симметрии* для графика функции $y = f(x)$, $x \in X$, если множество X симметрично относительно точки $x = a$ и равенство $f(a - \varepsilon) = f(a + \varepsilon)$ выполняется тождественно для любого $\varepsilon > 0$ такого, что точки $a \pm \varepsilon$ одновременно принадлежат X . Точка (a, b) называется *центром симметрии* графика функции $y = f(x)$, $x \in X$, если множество X симметрично относительно точки $x = a$ и равенство $f(a - \varepsilon) + f(a + \varepsilon) = 2b$ выполняется для любого $\varepsilon > 0$ такого, что точки $a \pm \varepsilon$ одновременно принадлежат X .

Рассмотрим случаи, когда функции (кривые) заданы явно, неявно и параметрически, и в каждом случае установим, как выявить, обладает ли кривая тем или иным видом симметрии.

1. Явно заданные функции. Пусть функция задана явно на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$ уравнением $y = f(x)$.

Симметрия относительно оси ординат: чётные и нечётные функции. Ещё в курсе средней школы вводятся понятия чётных и нечётных функций. Так, функция $f(x)$, заданная на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, называется *чётной* (*нечётной*), если X симметрично относительно точки $x = 0$ и для любого $x \in X$ выполняется тождество $f(-x) \equiv f(x)$ (соответственно, $f(-x) \equiv -f(x)$). Иначе говоря, чётная функция – это функция, не изменяющая своего значения при изменении знака независимой переменной, а нечётная функция – функция, меняющая значение на противоположное при изменении знака независимой переменной.

Приведём примеры тождеств, определяющих нечётные функции:

$$\arcsin(-x) \equiv -\arcsin x, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\operatorname{arctg}(-x) \equiv -\operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{sh}(-x) \equiv -\operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{sgn}(-x) \equiv -\operatorname{sgn} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В связи с чётными и нечётными функциями отметим их важнейшие **свойства**.

1. График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат, а нечётной функции – имеет центр симметрии в точке $O(0, 0)$.

2. Любую функцию, определённую на симметричном относительно точки $x = 0$ множестве, можно единственным образом представить в виде суммы двух функций, одна из которых чётна, а другая – нечётна. Делается это с помощью тождества

$$f(x) \equiv \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad x \in X,$$

где $\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ – чётная, а $\psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ – нечётная функции. Применяя тождество, получим, что, например, квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ представима в виде суммы чётной функции $ax^2 + c$ и нечётной функции bx .

Пример 81. [ДВИ МГУ] Представить, если можно, функцию $f(x) = \frac{2^x + x}{\sin x}$ в виде суммы чётной и нечётной функций.

Решение. Область определения $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi n\}$ симметрична относительно точки $x = 0$, т. е. представить можно. Применяя тождество, получаем

$$f(x) = \frac{\frac{2^x+x}{\sin x} + \frac{2^{-x}-x}{\sin(-x)}}{2} + \frac{\frac{2^x+x}{\sin x} - \frac{2^{-x}-x}{\sin(-x)}}{2} = \varphi(x) + \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ – чётная функция, $\psi(x)$ – нечётная функция. $\square$

3. Функция $f(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, – единственная функция, одновременно являющаяся нечётной и чётной.

4. Сумма, разность и вообще любая линейная комбинация чётных функций чётна, а нечётных – нечётна. Поэтому чётные функции образуют линейное векторное пространство над полем действительных чисел, это же справедливо и для нечётных функций.

5. Произведение (частное) двух функций одной чётности чётно. Произведение (частное) двух функций разной чётности нечётно.

6. Композиция двух нечётных функций нечётна. Композиция чётной функции с нечётной чётна. Композиция любой функции с чётной чётна (но не наоборот).

Пример 82. Функции $\arctg(\operatorname{tg} x)$, $\operatorname{sgn}(\sin^3 x)$ являются нечётными; $|\sin x|$, $\sin |x|$, $\arccos(\cos x)$, $\cos(\arctg x)$, $2x^2 - |x| + 5$, $\frac{\ln x^2}{3x^6 + 1}$ – чётные функции. $\square$

7. Производная чётной функции нечётна, а нечётной – чётна.

8. Одна из первообразных чётной функции является нечётной функцией, а любая первообразная нечётной функции – чётная функция.

9. Разложение в ряд Маклорена чётной функции содержит только члены с чётными степенями, а нечётной – только с нечётными.

10. Если график периодической с периодом T функции имеет ось симметрии $x = a$, то осями симметрии будут все прямые вида $x = a + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$.

11*. Для собственных определённых интегралов от чётных интегрируемых функций имеет место равенство

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx.$$

Соответственно, для определённых интегралов от нечётных функций выполняется равенство

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

12*. Для несобственных интегралов от чётных интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций справедливы аналогичные соотношения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_{-\infty}^0 f(x) dx.$$

Для нечётных функций имеем: $V. \text{ p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$ (здесь $V. \text{ p.}$ есть главное значение интеграла по Коши).

Пример 83. Наиболее известные нечётные функции:

- степень с нечётным целым показателем x^{2k+1} , где $k \in \mathbb{Z}$;
- кубический корень $\sqrt[3]{x}$ и, вообще, корень любой положительной нечётной степени $\sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$;
- тригонометрические синус $\sin x$, тангенс $\operatorname{tg} x$, котангенс $\operatorname{ctg} x$, косеканс $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$;
- обратные тригонометрические функции: арксинус $\arcsin x$, арктангенс $\operatorname{arctg} x$;
- гиперболические синус $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, тангенс $\operatorname{th} x$, котангенс $\operatorname{cth} x$; обратные гиперболические функции: ареасинус $\operatorname{arsh} x$, ареатангенс $\operatorname{arth} x$;
- знак числа (сигнум) $\operatorname{sgn} x$. $\square$

Пример 84. Основные чётные функции:

- степень с чётным целым показателем x^{2k} , где $k \in \mathbb{Z}$;
- абсолютная величина (модуль) действительного числа $|x|$;
- постоянная функция $y \equiv C$, где $C = \operatorname{const}$;
- тригонометрические функции косинус $\cos x$, секанс $\sec x = \frac{1}{\cos x}$;
- гиперболический косинус $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
- функция Дирихле. $\square$

Симметрия относительно прямых, параллельных координатным осям. Преобразования сдвига (параллельного переноса) кривой вправо-влево и вверх-вниз приводит к симметриям относительно прямых, параллельных осям координат.

Пример 85. График функции $y = |x - 1| + 3$ имеет ось симметрии $x = 1$. График кривой $y = \sqrt[3]{x - 2} - 1$ центрально симметричен относительно точки $(2, -1)$. $\square$

2. Неявно заданные кривые. Пусть некоторая кривая (фигура) F на плоскости задана неявно уравнением $f(x, y) = 0$ (или неравенством $f(x, y) \leq 0$). Рассмотрим некоторые из признаков симметрии кривой F .

Симметрия относительно координатных осей Ox , Oy и начала координат.

1. Если функция $f(x, y)$ чётна относительно переменной x , т. е. при всех допустимых x, y выполняется тождество

$$f(-x, y) = f(x, y),$$

то кривая F симметрична относительно прямой $x = 0$.

2. Если функция $f(x, y)$ чётна относительно переменной y , т. е. при всех допустимых x, y справедливо тождество

$$f(x, -y) = f(x, y),$$

то кривая F симметрична относительно прямой $y = 0$.

3. Если функция $f(x, y)$ чётна по обоим переменным x и y , т. е. при всех допустимых x, y выполняется тождество

$$f(-x, -y) = f(x, y),$$

то F симметрична относительно точки $(0, 0)$.

Пример 86. Кривая $|x| + y = 0$ симметрична относительно оси Oy , кривая $x + |y| = 0$ симметрична относительно оси Ox , а кривая $xy - 1 = 0$ имеет в начале координат центр симметрии. Квадрат $|x| + |y| = 1$ симметричен относительно обеих координатных осей, а линия $|x - 1| + |y + 3| = 2$ — относительно прямых $x = 1$, $y = -3$. $\square$

Симметрия плоской фигуры относительно прямой $y = x$. Пусть замена x на y , а y , наоборот, на x , не приводит к изменению уравнения (неравенства). Иначе говоря, точки (x, y) и (y, x) одновременно принадлежат данной фигуре при всех допустимых x и y . Тогда кривая симметрична относительно прямой $y = x$.

Пример 87. Декартов лист $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ и астроида¹ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) симметричны относительно $y = x$. $\square$

3. Параметрически заданные кривые. Пусть кривая задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in T. \end{cases}$$

¹Астроида (от греч. *αστρον* — звезда и *ειδος* — вид, то есть звездообразная) — плоская кривая, для которой длина отрезка касательной в произвольной точке, заключённого между осями координат, постоянна и равна a . С другой стороны, астроида можно определить как плоскую кривую, описываемую точкой окружности радиуса r , катящейся по внутренней стороне окружности радиуса $R = 4r$. Астроида также является алгебраической кривой 1 рода (и шестого порядка) и задаётся неявным уравнением: $(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0$.

Признак симметрии относительно оси ординат. Если при замене t на $(-t)$ переменная x меняет знак, а переменная y не меняет своего значения, то это означает симметрию кривой относительно оси ординат.

Признак симметрии относительно оси абсцисс. Если при замене t на $(-t)$ переменная y меняет знак, а переменная x не меняет своего значения, то это означает симметрию кривой относительно оси абсцисс.

Имеются и другие признаки симметрии параметрически заданных кривых (см. пример ниже).

Пример 88. Рассмотрим параметрические уравнения эллипса

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что если заменить t на $-t$, то значение x не изменяется, а переменная y меняет знак на противоположный:

$$\begin{cases} x(-t) = x(t), \\ y(-t) = -y(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

что означает симметрию кривой относительно оси абсцисс. Далее, при замене t на $\pi - t$ переменная y сохраняет значение, а переменная x меняет знак на противоположный

$$\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t), \\ y(\pi - t) = y(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

следовательно, кривая симметрична относительно оси ординат. $\square$

4.2.2 Симметрия кривых в полярных координатах

Признаки симметрии плоской кривой относительно полярной оси.

Если в полярных координатах функция $r = r(\varphi)$, задающая кривую, чётна, т. е. при всех допустимых φ выполняется условие $r(-\varphi) = r(\varphi)$, то это означает симметрию кривой относительно полярной оси. Заметим, что свойство чётности функции не является единственным, отвечающим за симметрию кривых относительно полярной оси. Например, условие может иметь вид $r(2\pi - \varphi) = r(2\pi + \varphi)$.

Пример 89. Кардиоида $r = 1 + \cos \varphi$ симметрична относительно полярной оси, так как при всех $\varphi \in \mathbb{R}$ верно $1 + \cos(-\varphi) = 1 + \cos \varphi$. $\square$

Пример 90. Лемниската Бернулли $r = \sqrt{a \cos 2\varphi}$ симметрична относительно полярной оси, так как при всех допустимых φ верно $\sqrt{a \cos 2(-\varphi)} = \sqrt{a \cos 2\varphi}$. $\square$

Пример 91. «Бабочка» Темпла Фея $r = e^{\cos \varphi} - 2 \cos(4\varphi) + \sin^5(\frac{\varphi}{12})$ представляет более сложный пример красивой кривой, симметричной относительно полярной оси

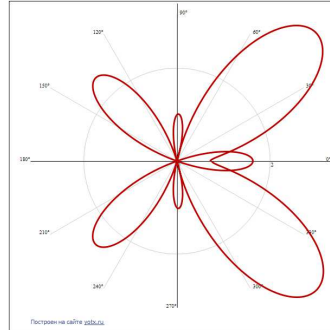


Рис. 38: «Бабочка» Темпла Фея $r = e^{\cos \varphi} - 2 \cos(4\varphi) + \sin^5(\frac{\varphi}{12})$

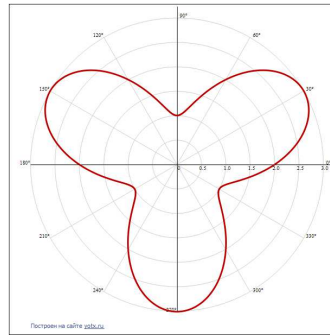


Рис. 39: Кривая $r = 2 + \sin 3\varphi$.

(Рис. 38). Симметрия последнего слагаемого $r_1(\varphi) = \sin^5(\frac{\varphi}{12})$ следует из тождества $r_1(12\pi - \varphi) = r_1(12\pi + \varphi)$. $\square$

Признаки симметрии кривой относительно оси, перпендикулярной полярной. Если в полярных координатах функция $r = r(\varphi)$, задающая кривую, удовлетворяет условию

$$r(\varphi) = r(\pi - \varphi) \quad (\text{или} \quad r\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)),$$

то это означает симметрию кривой относительно оси, перпендикулярной полярной. Существуют и другие возможности распознать этот вид симметрии.

Пример 92. Кривая $r = 2 + \sin 3\varphi$ симметрична относительно оси, перпендикулярной полярной (Рис. 39), так как при всех действительных φ выполняются оба указанных выше условия. $\square$

4.3 Периодичность функций

«Книги — корабли мысли, странствующие по волнам времени и бережно несущие свой драгоценный груз от поколения к поколению».

Фрэнсис Бэкон (1561–1626), английский философ, историк, публицист, государственный деятель. Один из первых крупных философов периода Позднего Возрождения и начала Нового времени. Бэкон был сторонником строго обосновываемого, доказательного научного подхода.

Свойство периодичности функций одной переменной является одним из важнейших свойств, означающих повторяемость участков графика.

Периодические процессы очень распространены в природе, самый известный пример — смена дня и ночи, времен года (годовой цикл).¹

Простейшим периодическим процессом является простое гармоническое колебание, описываемое функцией $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. При этом не только координата x тела изменяется со временем t по закону синуса или косинуса, но и такие связанные с колебательным процессом величины как сила, скорость и ускорение. Малые колебания, как правило, описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, решения которых всегда выражаются через экспоненциальную, степенную и тригонометрические функции времени. Существуют сложные гармонические колебания, возникающие в результате наложения конечного или бесконечного числа простых гармоник.

В силу указанных выше причин, для описания периодических процессов часто используются разложения периодических функций в тригонометрические *ряды Фурье*. Если, например, функция периодична с периодом $T = 2\pi$, то она представима в виде ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Рассмотрим свойство периодичности подробнее как в прямоугольных, так и в полярных координатах.

¹Считается, что именно периодичность процессов ответственна за самоподобную форму берегов морей, рек, форму гор, что механизм периодических процессов и разница в структуре земли и воздуха привели к самоподобной (фрактальной) форме деревьев и дыхательных путей в организме человека. Везде, где требуется эффективный обмен между твердой и жидкой либо газообразной средой при наличии периодических процессов, постепенно в ходе эволюции формируются самоподобные структуры. Периодические процессы в организме животных и человека, такие как сердцебиение и цикл дыхания (период $\sim 1 - 2$ секунды) сформировали в теле, и в частности, в мозгу самоподобные структуры, ответственные за эффективный обмен веществом, энергией, и в конечном счёте (на более тонком уровне) — информацией.

4.3.1 Периодичность функций в декартовых координатах

Периодичность явно заданных функций. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, называется *периодической*, если существует такое число $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (называемое *периодом*), что для любого $x \in X$ числа $x - T, x, x + T$ одновременно принадлежат X , и при этом для любого $x \in X$ выполняется равенство

$$f(x + T) \equiv f(x) \quad (\text{условие периодичности}).$$

Наименьший положительный период (если он существует) называется *главным*, или *основным*, *периодом* функции.

Пример 93. Все основные тригонометрические функции являются периодическими. Примерами неэлементарных периодических функций являются дробная часть числа $y = \{x\}$ (период $T = 1$), а также функция Дирихле (в качестве периода можно взять любое ненулевое рациональное число). $\square$

Периодические функции обладают следующими **свойствами**.

1. График периодической функции представляют собой последовательность одинаковых повторяющихся участков длиной, равной периоду. Если график функции построен на любом из участков длины T , то повторяя его вправо и влево вдоль оси абсцисс бесконечное число раз, получаем весь график периодической функции.

Заметим, что в некоторых случаях, например в случае с функцией Дирихле, периодичность графически не очевидна, её можно лишь доказать аналитически.

2. Производная периодической дифференцируемой функции, отличной от постоянной, также периодична и с тем же периодом: $f'(x + T) = f'(x)$, $\forall x \in X$.

3. Если периодическая функция $f(x)$ определена в точке x_0 , то она определена во всех точках вида $x_0 + nT$, где $n \in \mathbb{Z}$, причём $f(x_0 + nT) = f(x_0)$. Если периодическая функция не определена в точке x_0 , то она не определена и в точках вида $x_0 + nT$.

4*. Пусть $f(x)$ – периодическая с периодом T функция, интегрируемая по Риману на любом промежутке длины T . Тогда в любом таком промежутке интеграл от $f(x)$ принимает одно и то же значение:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

5. Сумма, разность, произведение и частное периодических функций с периодом T есть периодическая функция с периодом T .

6. Если период функции $f(x)$ равен T , то период функции

$$y = A \cdot f(Bx + C) + D,$$

где A, B, C, D – ненулевые коэффициенты, равен $T/|B|$ (и не зависит от коэффициентов A, C, D).

Пример 94. Найти период функции $f(x) = \cos^2(7x) + \frac{3}{2}$.

Решение. Преобразуем функцию к виду

$$f(x) = \frac{1 + \cos(14x)}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cos(14x) + 2,$$

тогда её основной период равен $T = \frac{2\pi}{14} = \frac{\pi}{7}$. $\square$

7. Сумма, разность, произведение и частное двух функций с разными периодами T_1 и T_2 является периодической функцией лишь в случае, если существует такое число $T \neq 0$, которое делится нацело и на T_1 , и на T_2 (т. е. если периоды T_1 и T_2 соизмеримы). Это утверждение справедливо для непрерывных функций, но не имеет места в общем случае.

Пример 95. Найти период функции $f(x) = \sin \frac{2x}{5} - 7 \sin \frac{x}{3}$, если он существует.

Решение. Основной период первой из функций $f_1(x) = \sin \frac{2x}{5}$ равен $T_1 = \frac{2\pi}{2/5} = 5\pi$, а второй функции $T_2 = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$. Поэтому данная функция периодична с периодом $T = 30\pi$. $\square$

Пример 96. Найти период функции $f(x) = 2 \sin x + 5 \sin(\pi x) - 3$, если он существует.

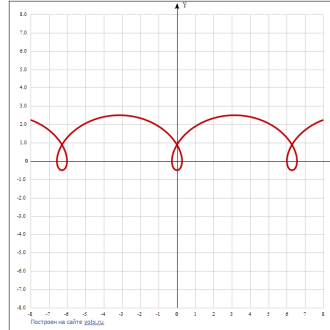
Решение. Основной период функции $f_1(x) = 2 \sin x$ равен $T_1 = 2\pi$, а функции $5 \sin(\pi x)$ равен $T_2 = 2$. Как видим, эти периоды несоизмеримы, а значит, функция $f(x)$ не является периодической. $\square$

Пример 97. Существует ли периодическая функция, у которой периодами являются несоизмеримые числа?

Ответ: да, например $f(x) = \text{const}$. У этой функции любое $T \neq 0$ ($T \in \mathbb{R}$) является периодом, в чём легко убедиться, используя определение. $\square$

8. Не всякая периодическая функция имеет основной период. Например, постоянная функция (так же как и функция Дирихле) не имеет главного периода. Однако периодическая, не равная константе функция, непрерывная хотя бы в одной точке, всегда имеет наименьший положительный период [9].

9. Если у функции есть основной период T , то любой период функции имеет вид nT , где $n \neq 0$ – целое число.


 Рис. 40: Удлинённая циклоида $a = 1$, $h = 1,5$.

10. Пусть T_1 и T_2 – произвольные положительные числа. Тогда существуют такие периодические функции f и g , что их основные периоды равны соответственно T_1 и T_2 , а их сумма $f + g$ периодична, но не имеет основного периода.

Периодичность функций, заданных параметрически. Одним из известных примеров периодической плоской кривой, заданной параметрически, является *циклоида*

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Её обобщением является *трохоида* (от греч. «колесообразный») – общее название плоских трансцендентных кривых, которые описывает точка, находящаяся внутри или вне круга, катящегося без скольжения по прямой. Параметрические уравнения трохойды:

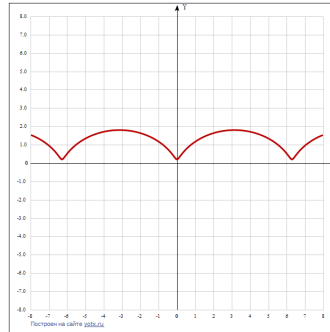
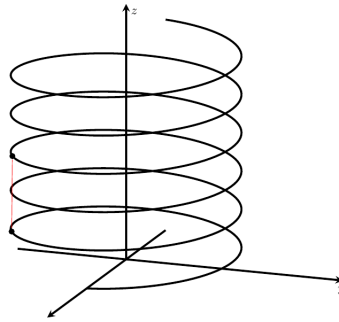
$$\begin{cases} x = at - h \sin t, \\ y = a - h \cos t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

где h – расстояние от точки до центра окружности, a – радиус окружности, которая катится по оси абсцисс. Если $h = a$, то трохоида переходит в циклоиду. При $h > a$ трохойду называют *удлинённой циклоидой* (Рис. 40), а при $h < a$ – *укороченной циклоидой* (Рис. 41).

Как определить периодичность кривой, заданной параметрически системой

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}?$$

Если существует такое $\bar{T} \neq 0$, что при любом допустимом t выполняются тождества $x(t + \bar{T}) = x(t) + T$, $y(t + \bar{T}) = y(t)$, то кривая на плоскости (x, y) , определяемая этими уравнениями, периодична с периодом T .

Рис. 41: Укороченная циклоида $a = 1$, $h = 0,8$.Рис. 42: Винтовая линия $x(t) = a \cos t$, $y(t) = a \sin t$, $z(t) = bt$.

Пример 98. Периодичность циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

следует из тождеств: $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi a$, $y(t + 2\pi) = y(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ (здесь $\bar{T} = 2\pi$, $T = 2\pi a$). $\square$

Обобщением плоских периодических кривых на пространственный случай служат кривые с циклически повторяющимися участками. Приведём в качестве примера винтовую линию. *Винтовая линия* – это кривая в трёхмерном пространстве, обвивающаяся вокруг круглого цилиндра и пересекающая его образующие под одинаковым углом (Рис. 42). Цилиндрическая винтовая линия задаётся в прямоугольных координатах параметрическими уравнениями

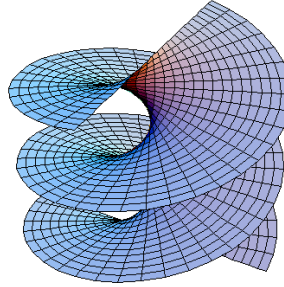


Рис. 43: Геликоид – винтовая поверхность.

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t, \\ y(t) = a \sin t, \\ z(t) = bt, \end{cases}$$

где a – радиус цилиндра. Величину $2\pi b$ называют шагом винтовой линии, геометрически это расстояние между соседними витками линии (вдоль образующей цилиндра). Проекция винтовой линии на плоскость (x, y) представляет собой окружность радиуса a .

Кроме кривых, цикличностью в пространстве обладают многие поверхности, например, геликоид. *Геликоид* – это винтовая поверхность, описываемая двухпараметрическими соотношениями

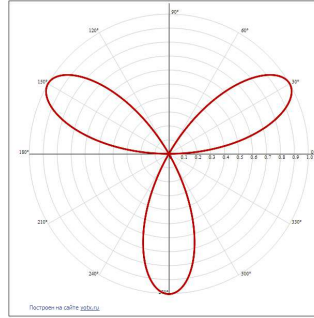
$$\begin{cases} x(t) = u \cos v, \\ y(t) = u \sin v, \\ z(t) = hv, \end{cases}$$

и образованная движением прямой, вращающейся вокруг перпендикулярной к ней оси и одновременно поступательно движущейся в направлении этой оси, причём скорости этих движений пропорциональны (Рис. 43).

4.3.2 Периодичность функций в полярных координатах

Периодичность в полярных координатах выражается в том, что некоторый участок кривой $r = r(\varphi)$, соответствующий отрезку $[\varphi_1, \varphi_2]$ длины T , повторяется бесконечно при повороте вокруг полюса как центра.

Примером периодической функции в полярных координатах может служить *трилистник* (трёхлепестковая роза) – кривая, задаваемая уравнением $r = a \sin 3\varphi$. Данная функция имеет период $\frac{2\pi}{3}$, и на каждом периоде $\varphi \in [\frac{2\pi n}{3}, \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3})$ вокруг полюса располагается один «лепесток» (Рис. 44). Другие

Рис. 44: Трилистник $r = \sin 3\varphi$.

примеры см. на Рис. 36 и Рис. 39.

4.4 Особые точки плоских кривых*

Президент России Владимир Путин объявил 2022-2031 гг. десятилетием науки и технологий.

Данная тема изучается в разделе «Дифференциальная геометрия кривых». Особая точка кривой – это общее название точек, в окрестности которых не существует гладкой параметризации.

1. Кривая задана неявно. Точка кривой $F(x, y) = 0$ называется *особой*, если в этой точке частные производные функции F одновременно обращаются в нуль:¹

$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0. \end{cases}$$

Угловым коэффициентом $k = y'$ касательной в такой точке находится из уравнения

$$Ck^2 + 2Bk + A = 0,$$

где A, B, C – значения производных $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ в этой особой точке.

При этом возможны три случая:

1) $B^2 - AC > 0$ – две касательных, точка называется *узлом* (точкой самопересечения).

¹Забегаю вперёд, скажем, что $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ – частные производные функции двух переменных, которые вводятся в разделе функций многих переменных. Здесь F'_x есть производная функции $F(x, y)$ по переменной x при фиксированном y , а F'_y – производная функции $F(x, y)$ по переменной y при фиксированном x .

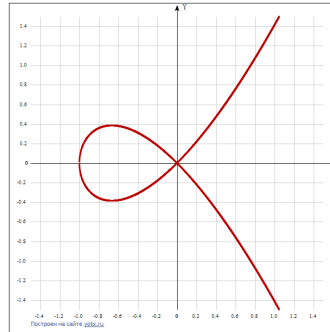


Рис. 45: Кривая $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ с особой точкой *узел*.

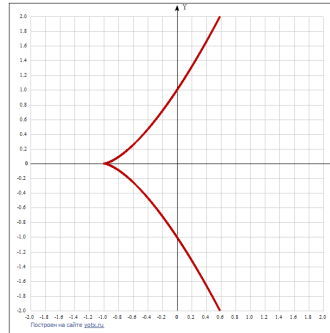


Рис. 46: Кривая $y^2 = (x + 1)^3$ с точкой *возврата 1 рода*.

2) $B^2 - AC < 0$ – нет касательной, точка называется *изолированной*.

3) $B^2 - AC = 0$ – или изолированная точка, или точка возврата, или точка самоприкосновения. В точках возврата и самоприкосновения существует одна общая касательная к двум ветвям кривой. Чтобы в третьем, сомнительном, случае решить вопрос окончательно, нужно узнать, имеются ли точки кривой в сколь угодно малой окрестности исследуемой точки.

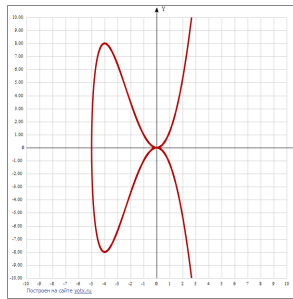
Пример 99. Кривая $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ имеет в $(0, 0)$ особую точку *узел* (Рис. 45).

Пример 100. Кривая $y^2 = (x + 1)^3$ имеет в $(-1, 0)$ особую точку – *точку возврата 1-го рода* (Рис. 46).

Пример 101. Кривая $x^3 - x^2 - y^2 = 0$ имеет в $(0, 0)$ *изолированную* особую точку (Рис. 47).

Пример 102. Кривая $4y^2 = x^5 + 5x^4$ имеет в $(0, 0)$ точку *самоприкосновения* (Рис. 48).

2. Кривая задана параметрически. *Особой точкой* для кривой, задан-

Рис. 47: Кривая $x^3 - x^2 - y^2 = 0$ с изолированной особой точкой.Рис. 48: Кривая $4y^2 = x^5 + 5x^4$ с точкой самоприкосновения.

ной параметрически, называется такая точка $M_0(x(t_0), y(t_0))$, в которой

$$\begin{cases} x'(t_0) = 0, \\ y'(t_0) = 0. \end{cases}$$

Пример 103. Найти особые точки кривой (*астроида*)

$$\begin{cases} x(t) = a \cos^3 t, \\ y(t) = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Решение. Найдём производные: $x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t$, $y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$. Эти производные одновременно обращаются в нуль в точках $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Это и есть особые точки кривой. $\square$

4.5 Задачи для самостоятельного решения

Найти асимптоты кривых, заданных явными уравнениями в прямоугольных координатах:

$$\text{№136. } y = \frac{|3x - 1|}{2 - x};$$

$$\text{№137. } y = \frac{2x^2 - 3x - 5}{x - 1};$$

$$\text{№138. } y = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 1};$$

$$\text{№139. } y = \frac{2x^2 - 3x - 5}{|x - 1|};$$

$$\text{№140. } y = \frac{1}{1 + x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1 - x};$$

$$\text{№141. } y = (x + 1)^{\frac{2}{3}} - (x - 1)^{\frac{2}{3}};$$

$$\text{№142. } y = 3^{\frac{x+2}{3x-4}};$$

$$\text{№143. } y = x + e^{-x}, x \in \mathbb{R};$$

$$\text{№144. } y = \frac{10 \ln x}{\sqrt{x^5}} \quad (x > 0);$$

$$\text{№145. } y = 2x - \operatorname{tg} x;$$

$$\text{№146. } y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}};$$

$$\text{№147. } y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 7};$$

$$\text{№148. } y = \sin \frac{1}{x};$$

$$\text{№149. } y = \left| -\frac{2x^2}{|x| - 1} + x - \frac{1}{|x|} \right|.$$

Найти наклонные асимптоты у графика функции, используя разложение функции по формуле Тейлора при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\text{№150. [24, с. 15]} \quad y = \sqrt[3]{|x|(x+3)^2};$$

$$\text{№151. [24, с. 20]} \quad y = \frac{(x-1)^7}{x^6};$$

$$\text{№152. [24, с. 20]} \quad y = \sqrt[3]{(1-x)(x+2)^2}.$$

№153. [13, с. 66] Пользуясь разложением по формуле Маклорена, найти константы a, b и c , определяемые равенством, и указать асимптоты графика функции

$$f(x) = (3x^3 - 3x^2) \cdot \left(\ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) - \frac{2}{x} \right) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Можно ли сказать, с какой стороны график подходит к асимптоте (отдельно при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$)?

№154. [13, с. 66] Определить, имеет ли функция наклонную (не горизонтальную) асимптоту при $x \rightarrow +\infty$:

$$\text{а) } f(x) = (3x - x^2) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}; \quad \text{б) } f(x) = (3x - x^2) \cdot \operatorname{arcsctg} \frac{1}{x}.$$

С какой стороны график подходит к асимптоте: сверху или снизу?

№155. Могут ли быть асимптоты у графика всюду разрывной функции? Рассмотреть пример

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

№156. Имеется ли криволинейная асимптота у графика функции

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Есть ли прямолinéйные асимптоты у этого графика?

№157. Доказать, что функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ и $g(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}$ асимптотически равны друг другу при $x \rightarrow +\infty$.

Найти асимптоты кривых, заданных неявно или параметрически в прямоугольных координатах:

№158. Найти асимптоту кривой, заданной неявно уравнением ($a > 0$, декартов лист)

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Указание. Найти параметрические уравнения, положив $y = tx$.

№159. Найти асимптоты кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \frac{(t+1)^2}{4}, \\ y = \frac{(t-1)^2}{4}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

№160. Найти асимптоты кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{(t+1)^3}{t^2}, \\ y = \frac{(t+1)(2t+1)}{t^2}, \end{cases} \quad t \neq 0.$$

№161. Найти асимптоты кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t-2}, \\ y = \frac{1}{t-1}. \end{cases}$$

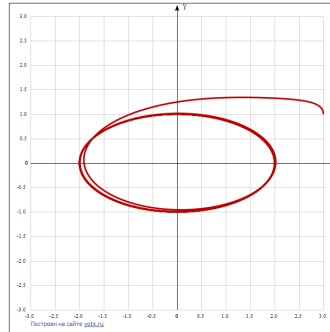


Рис. 49: Кривая $x = 2 \cos t + \frac{1}{1+t^2}$, $y = \sin t + \frac{1}{1+t^2}$, $t \geq 0$.

№162. Найти асимптоты кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1-t^2}, \\ y = \frac{t^2}{1-t^2}. \end{cases}$$

№163. Найти асимптоты кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{t^2-1}, \\ y = t + 1 + \frac{1}{t+1}. \end{cases}$$

№164. Найти асимптоты кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = 2 \cos t + \frac{1}{1+t^2}, \\ y = \sin t + \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Найти асимптоты кривых, заданных в полярных координатах:

№165. $r = \operatorname{arctg} 2\varphi$;

№166. $r = \operatorname{arccctg} \varphi$;

№167. $r = \frac{3}{2 - \cos \varphi}$;

№168. $r = \frac{16}{5 + 3 \cos \varphi}$;

№169. $r = \frac{16}{5 - 3 \sin \varphi}$;

№170. $r(4 + 5 \cos \varphi) = 18$.

Исследовать кривые на наличие точек самопересечения и разных форм симметрий:

№171. Найти точки самопересечения кривой

$$\begin{cases} x = t(2-t)(t-1), \\ y = t^2(2-t)(t^2-1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№172. Доказать, что график функции

$$y = 4x + \log_2 \frac{x^2 + 5x}{x^2 + 3x - 4}$$

имеет центр симметрии, и найти координаты (x, y) этого центра симметрии.

№173. Исследовать наличие симметрии у кривой, заданной параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos^2 t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№174. Исследовать наличие симметрии у кривой (*астроида*), заданной параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№175. Исследовать наличие симметрии у кривой, заданной параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = 2 \cos t + 1, \\ y = 2 \sin t - 3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№176. Исследовать наличие симметрии у кривой, заданной параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№177. Исследовать наличие симметрии у кривой, заданной параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = 4 \cos t + 3 \sin t, \\ y = 3 \cos t - 4 \sin t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№178. Исследовать симметрию кривой, заданной полярным уравнением

$$r = 2 + \sin \frac{\varphi}{2}.$$

№179. Исследовать симметрию кривой, заданной полярным уравнением

$$r = 1 + \sin \varphi.$$

№180. Исследовать симметрию кривой, заданной полярным уравнением

$$r = \sin \varphi + \cos \varphi.$$

№181. Исследовать симметрию кривой, заданной неявно в полярных координатах уравнением

$$(r^2 - 1)^3 = r^5 \cos^2 \varphi \cdot \sin^3 \varphi.$$

Решить задачи на периодические функции:

№182. Привести примеры периодических функций, сумма (разность) которых не является периодической функцией.

№183. Верно ли, что сумма двух периодических функций с несоизмеримыми периодами – непериодична?

№184. Существует ли периодическая функция, не равная константе, у которой периодами являются несоизмеримые числа?

№185. Существуют ли две периодические функции с несоизмеримыми периодами, сумма которых – периодическая функция?

№186. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на множестве всех действительных чисел периодические функции, не равные константе ни на каком интервале, основные периоды которых равны двум и шести, соответственно. Что можно сказать об основном периоде их суммы? Обязательно ли он равен шести?

№187. Доказать, что постоянная функция $f(x) \equiv C$, $x \in \mathbb{R}$, является периодической, но не имеет главного периода.

№188. Доказать, что функция Дирихле является периодической, а её периодом является любое ненулевое рациональное число (при этом никакое иррациональное число периодом не является).

№189. Существуют ли значения параметра a , при которых функция является периодической: а) $y = \frac{x^2 - a}{x^2 + a}$, б) $y = (a^2 - 2a)\sqrt{x^2 - a}$.

№190. Известно, что при всех допустимых действительных значениях x

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} \cdot f(x).$$

Периодична ли функция $f(x)$?

№191. Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 8 такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0, 8]$. Решить уравнение

$$f(2x + 16) + 23 = 5 \cdot f(x).$$

4.6 Ответы и решения

136. Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой, так как функция имеет бесконечный предел в точке $x = 2$. Найдём горизонтальные асимптоты. При $x \geq \frac{1}{3}$, раскрывая модуль, приходим к дробно-линейной функции $y = \frac{3x-1}{2-x}$, имеющей горизонтальную асимптоту $y = -3$ при $x \rightarrow +\infty$. При $x < \frac{1}{3}$ после раскрытия модуля получаем дробно-линейную функцию $y = \frac{3x-1}{x-2}$, имеющей горизонтальную асимптоту $y = 3$ при $x \rightarrow -\infty$.

137. 1) Покажем, что прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. В самом деле, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x - 1} = \infty$.

2) 1-й способ. Будем искать наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ в виде $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x(x-1)} = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 5}{x-1} - 2x \right) = -1.$$

Заметим, что при $x \rightarrow -\infty$ коэффициенты будут те же, т. е. имеется единая наклонная асимптота $y = 2x - 1$ при $x \rightarrow \infty$.

2-й способ. Выделим в дроби целую часть (делением многочлена в числителе на многочлен в знаменателе или последовательным выделением знаменателя в числителе, как это сделано ниже), представив функцию в виде:

$$y = \frac{2x^2 - 3x - 5}{x-1} = \frac{2x(x-1) - (x-1) - 6}{x-1} = 2x - 1 - \frac{6}{x-1} = 2x - 1 + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) = -\frac{6}{x-1} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, прямая $y = 2x - 1$ является, по определению, наклонной асимптотой графика данной функции.

138. Ответ: $x = -1$ – вертикальная асимптота, $y = 2x + 1$ – наклонная асимптота. См. решение предыдущей задачи.

139. 1) Покажем, что прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. В самом деле, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{|x-1|} = -\infty$.

2) Найдём наклонные асимптоты. Наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ будем искать в виде $y = kx + b$. С учётом положительного раскрытия модуля, получим:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x(x-1)} = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 5}{x-1} - 2x \right) = -1.$$

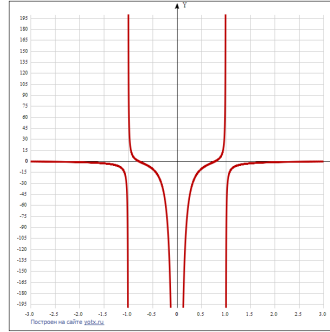


Рис. 50: Кривая $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$.

Далее, наклонную асимптоту при $x \rightarrow -\infty$ ищем в виде $y = k_1x + b_1$. Раскрывая модуль отрицательно, находим:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x(1-x)} = -2,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 5}{1-x} + 2x \right) = 1.$$

Ответ. График функции имеет три асимптоты: вертикальную $x = 1$ и две наклонных $y = 2x - 1$ (при $x \rightarrow +\infty$), $y = -2x + 1$ (при $x \rightarrow -\infty$).

140. График функции имеет три вертикальных асимптоты $x = \pm 1$, $x = 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow -1-0} y = \lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$ (Рис. 50).

141. Функция нечётна и $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$, поэтому $y = 0$ – единственная горизонтальная асимптота графика функции.

142. При $x \rightarrow \frac{4}{3} + 0$ имеем $\frac{x+2}{3x-4} \rightarrow +\infty$, поэтому $x = \frac{4}{3}$ – вертикальная асимптота графика функции. Далее, при $x \rightarrow -\infty$ имеем $y \rightarrow \sqrt[3]{3} - 0$, поэтому $y = \sqrt[3]{3}$ – горизонтальная асимптота.

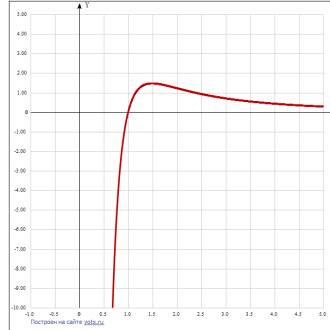
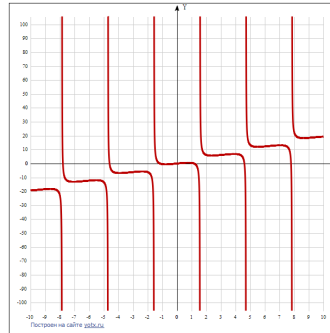
143. Будем искать наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ в виде $y = k_1x + b_1$:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x + e^{-x}) - x) = 0.$$

Итак, имеется асимптота $y = x$. Пусть теперь $x \rightarrow -\infty$, покажем, что другой асимптоты нет. В самом деле, будем искать асимптоту при $x \rightarrow -\infty$ в виде $y = k_2x + b_2$:

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = -\infty,$$

Рис. 51: Кривая $y = (10 \ln x) / (\sqrt{x^5})$.Рис. 52: Кривая $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

что означает отсутствие асимптоты.

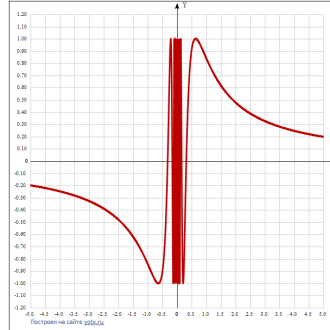
144. $D(y) : x > 0$. Кривая имеет две асимптоты: вертикальную $x = 0$ (так как $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow +0$) и горизонтальную $y = 0$ (так как $y \rightarrow +0$ при $x \rightarrow +\infty$) (Рис. 51).

145. Через точки разрыва функции $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, проходят вертикальные асимптоты, так как в каждой такой точке левый предел равен $-\infty$, а правый предел равен $+\infty$ (Рис. 52). Других асимптот нет.

146. Так как $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ и функция чётная, то прямая $y = 1$ является единственной горизонтальной асимптотой графика этой функции.

147. При $x \rightarrow +\infty$ имеем для асимптоты $y = k_1 x + b_1$:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 + x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x} = 2,$$

Рис. 53: Кривая $y = \sin \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + x \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} - 2x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + x \left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - 2x \right) = \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

т. е. имеется наклонная асимптота $y = 2x + \frac{5}{2}$. Аналогично при $x \rightarrow -\infty$ находится ещё одна (горизонтальная) асимптота $y = -\frac{1}{2}$.

148. При $x \rightarrow \pm\infty$ имеем $y \rightarrow 0$. Имеется горизонтальная асимптота $y = 0$ (Рис. 53).

149. Во-первых, график данной функции имеет три вертикальные асимптоты $x = 0$, $x = \pm 1$, поскольку предел функции в этих точках равен $+\infty$. Найдём наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \rightarrow +\infty$. Раскрывая внутренние модули, имеем

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| -\frac{2x}{x-1} + 1 - \frac{1}{x^2} \right| = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left| -\frac{2x^2}{x-1} + x - \frac{1}{x} \right| - x \right) = 2. \end{aligned}$$

Найдём наклонную асимптоту $y = k_1x + b_1$ при $x \rightarrow -\infty$. Раскрывая внутренние модули, имеем

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| -\frac{2x}{-x-1} + 1 + \frac{1}{x^2} \right| = -3, \\ b_1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left| -\frac{2x^2}{-x-1} + x + \frac{1}{x} \right| + 3x \right) = 2. \end{aligned}$$

Ответ: три вертикальные асимптоты $x = 0, x = \pm 1$ и две наклонные асимптоты $y = x + 2, y = -3x + 2$.

150. Функция определена на всём множестве действительных чисел. При $x \geq 0$ имеем $y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$, а при $x < 0$ получаем $y = -\sqrt[3]{x(x+3)^2}$. По этой причине, если мы найдём асимптоту $y = kx + b$ при $x \rightarrow +\infty$, то прямая $y = -kx - b$ будет являться асимптотой при $x \rightarrow -\infty$.

Пусть $x \rightarrow +\infty$, тогда справедливы преобразования:

$$y = \sqrt[3]{x(x+3)^2} = x \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = x \left(1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + 2 + o(1).$$

Следовательно, $y = x + 2$ – наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$. Тогда $y = -x - 2$ – наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

151. Для нахождения наклонных асимптот преобразуем при $x \rightarrow +\infty$ функцию к виду

$$y = \frac{(x-1)^7}{x^6} = x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^7 = x \left(1 - \frac{7}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - 7 + o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Ясно, что в этих выкладках ничто не изменится и при $x \rightarrow -\infty$, поэтому прямая $y = x - 7$ является (двусторонней) асимптотой при $x \rightarrow \infty$.

152. Функция определена на всём множестве действительных чисел. При $x \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{(1-x)(x+2)^2} = -x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \\ &= -x \left(1 - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(1 + \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x - 1 + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

В этих выкладках ничто не изменится и при $x \rightarrow -\infty$, поэтому прямая $y = -x - 1$ является (двусторонней) асимптотой при $x \rightarrow \infty$.

153. При $t \rightarrow 0$: $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$, поэтому при $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x^3 - 3x^2) \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x}\right) = \\ &= (3x^3 - 3x^2) \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3} - \frac{4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - \frac{2}{x}\right) = \\ &= (3x^3 - 3x^2) \cdot \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3} - \frac{4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = \end{aligned}$$

$$= -6x + 6 + 8 - \frac{8}{x} - \frac{12}{x} + \frac{12}{x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) = -6x + 14 - \frac{20}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

что по условию тождественно совпадает с выражением $ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, откуда определяем коэффициенты $a = -6$, $b = 14$, $c = -20$. Таким образом, график функции имеет наклонную асимптоту (при $x \rightarrow \infty$) $y = -6x + 14$. По знаку коэффициента c определяем, что при $x \rightarrow +\infty$ график приближается к асимптоте снизу, а при $x \rightarrow -\infty$, соответственно, сверху.

154. а) Используя $\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4)$, $t \rightarrow 0$, полагая $t = \frac{1}{x}$, получаем

$$f(x) = (3x - x^2) \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = (3x - x^2) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) = 3 - x + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Отсюда делаем вывод, что при $x \rightarrow +\infty$ график имеет наклонную асимптоту $y = 3 - x$, причём приближается к асимптоте сверху.

б) Имеем при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x - x^2) \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = (3x - x^2) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2}(3x - x^2) - \left(3 - x + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = -\frac{\pi}{2}x^2 + \left(\frac{3\pi}{2} + 1 \right)x - 3 - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Из-за наличия члена $-\frac{\pi}{2}x^2$ график функции не имеет (прямолинейной) асимптоты.

155. График функции при рациональных x совпадает с простейшей гиперболой $y = \frac{1}{x}$, которая, как известно, имеет две асимптоты: вертикальную $x = 0$ и горизонтальную $y = 0$. Других асимптот у данного графика быть не может. Проверим, являются ли указанные прямые асимптотами. Прямая $y = 0$ удовлетворяет определению горизонтальной асимптоты, а вот вертикальная прямая $x = 0$ асимптотой не является, поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует.

156. Делением многочлена на многочлен приведём функцию к виду

$$y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Отсюда видно, что так как $\frac{1}{x^2 + x + 1} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то парабола $y = x^2 + x + 1$ является криволинейной асимптотой для графика функции при $x \rightarrow \pm\infty$. Прямолинейных асимптот в данном случае нет.

157. Если определить наклонные асимптоты этих двух функций при $x \rightarrow +\infty$, то окажется, что они совпадают и имеют вид прямой $y = x + 2$, что и требовалось доказать.

158. Положим $y = tx$ в уравнении кривой:

$$x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x(1+t^3) - 3at) = 0.$$

Отсюда либо $x = 0$ ($\Rightarrow y = 0$, т. е. точка $(0, 0)$ принадлежит кривой), либо $x = \frac{3at}{1+t^3}$ (и тогда $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $t \neq -1$). Это параметрические уравнения декартова листа. Заметим, что асимптоты могут быть только при $t \rightarrow -1 \pm 0$ (отбираем те значения t , при которых хотя бы одна из переменных $x(t)$ или $y(t)$ стремятся к бесконечности).

Найдём асимптоту при $t \rightarrow -1 + 0$ (т. е. при $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow +\infty$). Ищем её в виде $y = k_1x + b_1$:

$$k_1 = \lim_{t \rightarrow -1+0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -1+0} \frac{\frac{3at^2}{1+t^3}}{\frac{3at}{1+t^3}} = -1,$$

$$b_1 = \lim_{t \rightarrow -1+0} (y(t) - k_1x(t)) = \lim_{t \rightarrow -1+0} \left(\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3} \right) = -a,$$

т. е. имеется асимптота $y = -x - a$. Та же асимптота будет и при $t \rightarrow -1 - 0$ ($x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -\infty$).

159. Асимптоты возможны только при $t \rightarrow \pm\infty$. Поищем асимптоту при $t \rightarrow +\infty$ в виде $y = k_1x + b_1$:

$$k_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(t-1)^2}{4}}{\frac{(t+1)^2}{4}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - k_1x(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{(t-1)^2}{4} - \frac{(t+1)^2}{4} \right) = -\infty.$$

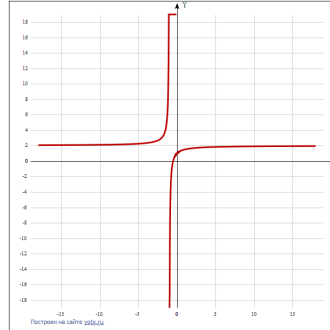
Аналогичный результат получается при $t \rightarrow -\infty$. Таким образом, наклонных асимптот у данной кривой нет.

160. Найдём, при каких значениях параметра t хотя бы одна из переменных $x(t)$ или $y(t)$ стремится к бесконечности. Определяем, что это происходит при $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \pm\infty$. Рассмотрим эти случаи. Вертикальных асимптот нет, так как в обоих случаях обе переменные стремятся не к константе, а к бесконечности. Поищем теперь наклонные (в т. ч. горизонтальные) асимптоты.

При $t \rightarrow \pm 0$ находим асимптоту $y = k_1x + b_1$, где

$$k_1 = \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{2t+1}{(t+1)^2} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{t \rightarrow \pm 0} (y(t) - k_1 \cdot x(t)) = \lim_{t \rightarrow \pm 0} (-(t+1)) = -1.$$

Рис. 54: Кривая $x = \frac{1}{t-2}$, $y = \frac{t}{t-1}$.

При $t \rightarrow \pm\infty$ находим асимптоту $y = k_2x + b_2$, где

$$k_2 = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0, \quad b_2 = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (y(t) - k_2 \cdot x(t)) = 2.$$

Ответ: $y = x - 1$ – наклонная асимптота при $t \rightarrow 0$; $y \equiv 2$ – горизонтальная асимптота при $t \rightarrow \infty$.

161. При $t \rightarrow 2$ координата x стремится к бесконечности, а координата y к конечному значению $y = 2$. Следовательно, в этой точке существует горизонтальная асимптота $y = 2$. При $t \rightarrow 1$ имеем $x \rightarrow -1$, $y \rightarrow \infty$. Здесь мы имеем вертикальную асимптоту $x = -1$. Легко проверить, что других асимптот у кривой нет (Рис. 54).

162. Отберём значения t , при которых либо $x \rightarrow \infty$, либо $y \rightarrow \infty$. Таких значений два: $t = \pm 1$. Проверим, имеются ли асимптоты при $t \rightarrow \pm 1$. Пусть $t \rightarrow 1$, тогда $y = k_1x + b_1$, где

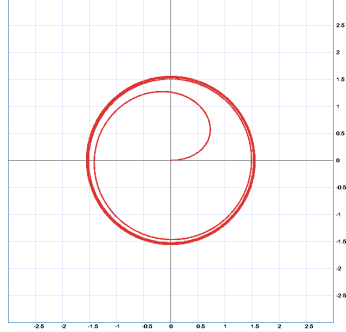
$$k_1 = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{t^2}{1-t^2}}{\frac{t}{1-t^2}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{t \rightarrow 1} (y(t) - k_1x(t)) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^2}{1-t^2} - \frac{t}{1-t^2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Итак, есть асимптота $y = x - \frac{1}{2}$ (при $t \rightarrow 1$). Аналогично при $t \rightarrow -1$ находим ещё одну асимптоту $y = -x - \frac{1}{2}$.

163. Найдём, при каких значениях параметра t хотя бы одна из переменных $x(t)$ или $y(t)$ стремится к бесконечности. Определяем, что это происходит при $t \rightarrow \pm 1$, $t \rightarrow \pm\infty$. Рассмотрим эти случаи. Поскольку при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty,$$

Рис. 55: Кривая $r = \arctg 2\varphi$.

то $x \equiv 1$ – вертикальная асимптота. Поскольку при $t \rightarrow 1$

$$\lim_{t \rightarrow 1} x(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow 1} y(t) = \frac{5}{2},$$

то $y \equiv 5/2$ – горизонтальная асимптота.

Найдём теперь наклонные асимптоты.

При $t \rightarrow -1$ ищем асимптоту в виде $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{(t^2 + 2t + 2)(t - 1)}{t^2} = -2,$$

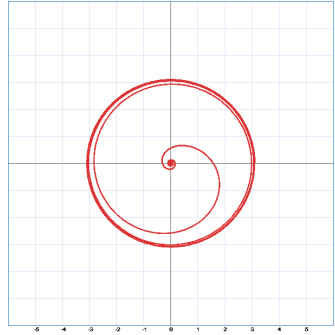
$$b = \lim_{t \rightarrow -1} (y(t) - k \cdot x(t)) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 + 2t - 2}{t - 1} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $x \equiv 1$ – вертикальная асимптота при $t \rightarrow \infty$; $y \equiv \frac{5}{2}$ – горизонтальная асимптота при $t \rightarrow 0$; $y = -2x + \frac{3}{2}$ – наклонная асимптота при $t \rightarrow -1$.

164. Прямолинейных асимптот у данной ограниченной кривой нет, но есть криволинейная асимптота эллиптического типа, определяемая уравнениями $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$ (Рис. 49).

165. Функция определена при $\varphi \geq 0$ и ограничена ($r < \frac{\pi}{2}$), поэтому прямолинейных асимптот у неё нет. Заметим, что при $\varphi \rightarrow +\infty$ имеем $r \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$. Это означает, что кривая имеет круговую асимптоту с уравнением $r = \frac{\pi}{2}$ (Рис. 55).

166. Функция определена при любых $\varphi \in \mathbb{R}$ и ограничена ($r < \pi$), поэтому прямолинейных асимптот у неё нет. Заметим, что при $\varphi \rightarrow +\infty$ имеем $r \rightarrow +0$ ($r = 0$ – асимптотическая особая точка), а при $\varphi \rightarrow -\infty$ имеем $r \rightarrow \pi - 0$. Последнее означает, что кривая имеет круговую асимптоту с уравнением $r = \pi$ (Рис. 56).

Рис. 56: Кривая $r = \operatorname{arccotg} \varphi$.

167. Данная кривая более узнаваема, если переписать её уравнение в прямоугольных координатах. В самом деле, поскольку $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то имеем:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = x + 3$$

$$4(x^2 + y^2) = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 3(x - 1)^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Это уравнение эллипса с центром в точке $(1, 0)$ и полуосями $a = 2$ и $b = \sqrt{3}$. Данная кривая не имеет асимптот.

168. Это эллипс (решите задачу самостоятельно, переходя к прямоугольным координатам).

169. Это эллипс (решите задачу самостоятельно, переходя к прямоугольным координатам).

170. Используя формулы $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, перейдём к прямоугольным координатам:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \left(4 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 18 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 + y^2} = 18 - 5x \Leftrightarrow$$

$$16(x^2 + y^2) = 324 - 180x + 25x^2 \Leftrightarrow \frac{(x - 10)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Это правая ветвь гиперболы с центром в точке $(10, 0)$, действительной полуосью $a = 8$ и мнимой полуосью $b = 6$.

171. Как видно из уравнений кривой, разным значениям параметра $t = 0$, $t = 1$ и $t = 2$ соответствует одна и та же точка $(x, y) = (0, 0)$. Значит, $(0, 0)$ – точка самопересечения кривой (тройной узел) (Рис. 57). Определите, как

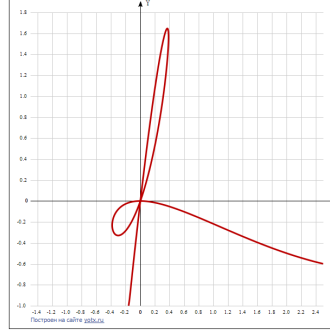


Рис. 57: Кривая $x = t(2 - t)(t - 1)$, $y = t^2(2 - t)(t^2 - 1)$.

движется точка по данной кривой при изменении параметра от $t = -\infty$ до $t = +\infty$.

172. Так как область определения функции задаётся неравенством

$$\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 3x - 4} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (-4, 0) \cup (1, +\infty),$$

а это множество симметрично относительно точки $x = -2$, то график функции может быть симметричен только относительно точки $(-2, y(-2)) = (-2, -8)$. Сделав подстановку $t = x + 2$, $s = y + 8$, получим новую функцию

$$s(t) = 4t + \log_2 \frac{t^2 + t - 6}{t^2 - t - 6},$$

для которой достаточно проверить условие нечётности $s(-t) \equiv -s(t)$:

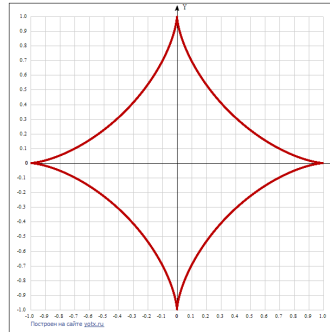
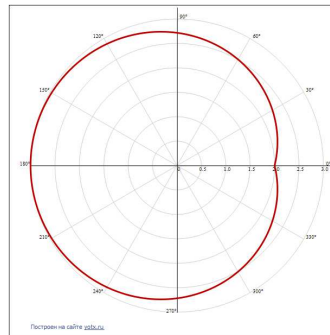
$$s(-t) = -4t + \log_2 \frac{t^2 - t - 6}{t^2 + t - 6} \equiv -s(t) - \text{верно.}$$

173. Очевидно, это парабола $y = x^2$, и она симметрична относительно оси ординат.

174. Заметим, что при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, что означает симметрию кривой относительно оси абсцисс. Далее, при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем $x(\pi - t) = -x(t)$, $y(\pi - t) = y(t)$, следовательно, кривая дополнительно симметрична относительно оси ординат (Рис. 58). Кроме того, поскольку кривую можно задать неявным уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, то, меняя местами x и y , получаем, что уравнение сохраняет свой вид. Это означает симметрию кривой относительно прямой $y = x$.

175. Это окружность радиуса 2 с центром в точке $(1, -3)$. Любая прямая, проходящая через центр окружности, является её осью симметрии. Сам центр окружности является центром её симметрии.

176. Это гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, имеющая две оси симметрии, совпадающие с координатными осями.

Рис. 58: Астроида $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.Рис. 59: Кривая $r = 2 + \sin \frac{\varphi}{2}$

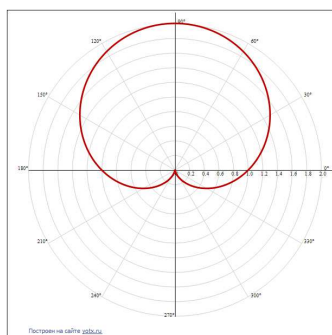
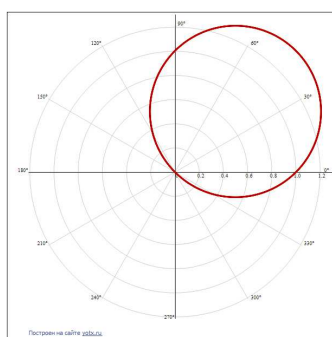
177. Возводя в квадрат оба уравнения системы и складывая их, получаем уравнение $x^2 + y^2 = 5^2$, которое определяет окружность с центром в начале координат и радиусом 5.

178. Кривая симметрична относительно полярной оси, так как при всех φ выполняется условие $r(\pi - \varphi) = r(\pi + \varphi)$ (Рис. 59).

179. Кривая симметрична относительно $\varphi = \frac{\pi}{2}$, так как при всех φ выполняется условие $r(\pi - \varphi) = r(\varphi)$ (Рис. 60).

180. Преобразуем кривую $r = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} \sin \varphi + \sin \frac{\pi}{4} \cos \varphi) = \sqrt{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$. Уравнение $r = \sin \varphi$ задаёт окружность с центром в точке $(r, \varphi) = (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ и радиусом $\frac{1}{2}$, а данная кривая получается из неё растяжением (от полюса) в $\sqrt{2}$ раз и поворотом по часовой стрелке на угол $\frac{\pi}{4}$. Поэтому любая прямая, проходящая через центр этой окружности, является для неё осью симметрии (Рис. 61).

181. Перепишем уравнение в виде $(r^2 - 1)^3 = (r^2 \cos^2 \varphi) \cdot (r^3 \sin^3 \varphi)$ и перейдём к совмещённым декартовым координатам: $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 \cdot y^3$. Теперь

Рис. 60: Кривая $r = 1 + \sin \varphi$ Рис. 61: Окружность $r = \sin \varphi + \cos \varphi$.

становится хорошо видна симметрия кривой относительно оси ординат (прямой $x \equiv 0$). Форма кривой напоминает «сердечко». (Уравнение кривой было изображено на сувенире, подаренном автору студентами группы 101 ВМК в 2021 году в честь признательности и завершения учебного года).

182. Например, функции $f_1(x) = \sin x$ и $f_2(x) = \sin \pi x$ являются периодическими с периодами $T_1 = 2\pi$ и $T_2 = 2$ соответственно, однако их сумма $f(x) = \sin x + \sin \pi x$ не является периодической, так как не существует такого числа $T \neq 0$, которое делилось бы нацело на 2π и на 2 (эти периоды несоизмеримы).

183. Вообще говоря, нет. Например, $f(x) \equiv 1$, $T_1 = 1$ и $g(x) \equiv 2$, $T_2 = \sqrt{2}$.

184. Да. Например [9], пусть $\mathbb{Q}_1$ – множество всех чисел вида $\alpha + n\sqrt{2}$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Z}$. Зададим функцию соотношением:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}_1, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}_1. \end{cases}$$

У этой функции периодами являются и любое рациональное число, например 1, и иррациональное число $\sqrt{2}$.

185. Да. Например [9], разность функции из предыдущей задачи и функции Дирихле. В этом случае интересно то, что $\sqrt{2}$ не соизмерим ни с каким периодом функции Дирихле.

186. Нет, не обязательно [9]. Например, пусть $f(x) = \sin \pi x$ ($T_1 = 2$), $g(x) = \sin \pi x + \sin \frac{2\pi x}{3}$ ($T_2 = 6$), но функция $f(x) + (-g(x)) = -\sin \frac{2\pi x}{3}$ имеет период $T_3 = 3 \neq 6$.

187. Покажем, что любое не равное нулю действительное число T является периодом постоянной функции. Действительно, при любом $x \in \mathbb{R}$ выполняется условие периодичности $f(x+T) = f(x)$, что по определению означает периодичность функции с периодом T . Чтобы доказать, что не существует наименьшего положительного периода, фактически надо доказать, что не существует наименьшего действительного положительного числа. От противного, предположим, что такое число существует, обозначим его $T_{\min}$. Рассмотрим другое число $\frac{T_{\min}}{2}$, оно также является действительным и при этом меньше $T_{\min}$. Пришли к противоречию с тем, что $T_{\min}$ – наименьшее положительное действительное число, что доказывает утверждение.

188. Пусть T – любое ненулевое рациональное число. Покажем, что оно удовлетворяет условию периодичности для функции Дирихле: $D(x+T) = D(x)$. Действительно, рациональное число x при добавлении рационального T остаётся рациональным, а значит, сохраняет значение функции (равное 1), а иррациональное x при добавлении рационального T остаётся иррациональным и тоже сохраняет значение функции (равное 0). Тот факт, что никакое иррациональное число не является для функции Дирихле периодом, докажете

самостоятельно.

189. а) $a < 0$; б) $a = 0$. Решение. а) При $a < 0$ имеем $y \equiv 1$, это периодическая функция. При $a > 0$ функция не определена в двух точках $x = \pm\sqrt{a}$, что невозможно для периодических функций (если функция $f(x)$ периодична и не определена в точке x_0 , то она не определена во всех точках вида $x_0 + Tn$, где $n \in \mathbb{Z}$). При $a = 0$ функция не определена в одной точке $x = 0$, что также невозможно.

б) При $a = 0$ функция $y \equiv 0$, это периодическая функция. При $a = 2$ имеем $y = 0 \cdot \sqrt{x^2 - 2}$ — определена при $|x| \geq \sqrt{2}$, следовательно, не может быть периодической. При $a \neq 0, a \neq 2$ функция четна и строго монотонна в той части области определения, которая принадлежит полуплоскости $x \geq 0$, но никакая строго монотонная функция периодической быть не может.

190. Перепишем тождество в виде $f(x+1) = \sqrt{2} \cdot f(x) - f(x-1)$ и, положив в этом тождестве $x := x + 1$, получим

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \sqrt{2} \cdot f(x+1) - f(x) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot f(x) - f(x-1)) - f(x) = \\ &= f(x) - \sqrt{2} \cdot f(x-1). \end{aligned}$$

Подставим в последнее равенство $x+2$ вместо x :

$$\begin{aligned} f(x+4) &= f(x+2) - \sqrt{2} \cdot f(x+1) = f(x+2) - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot f(x) - f(x-1)) = \\ &= f(x) - \sqrt{2} \cdot f(x-1) - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot f(x) - f(x-1)) = -f(x). \end{aligned}$$

Подставим в последнее равенство $x+4$ вместо x : $f(x+8) = -f(x+4) = f(x)$. Следовательно, функция $f(x)$ периодична с периодом $T = 8$.

191. $x = 1+8n, x = 7+8m$, где $n, m \in \mathbb{Z}$. Решение. Используя периодичность функции, перепишем уравнение в виде $f(2x) + 23 = 5 \cdot f(x)$. Рассмотрим далее два случая.

1) Пусть $0 \leq x \leq 4$, тогда $0 \leq 2x \leq 8$ и уравнение примет вид

$$8 \cdot 2x - (2x)^2 + 23 = 5(8x - x^2) \Leftrightarrow x^2 - 24x + 23 = 0,$$

откуда находим $x = 1$.

2) Пусть теперь $4 < x \leq 8$, тогда $0 < 2x - 8 \leq 8$. Уравнение можно переписать в виде $f(2x - 8) + 23 = 5f(x)$, т. е.

$$8 \cdot (2x - 8) - (2x - 8)^2 + 23 = 5(8x - x^2) \Leftrightarrow x^2 + 8x - 105 = 0,$$

откуда находим $x = 7$. Так как функция $f(x)$ периодична с периодом $T = 8$, то для получения всех решений достаточно прибавить к полученным значениям x целое число периодов.

5 СЕМИНАР: Построение кривых в декартовых координатах

«Образование – это то, что остаётся после того, когда забывается всё, чему учили».

Альберт Эйнштейн (1879–1955), физик-теоретик, один из основателей современной теоретической физики, лауреат Нобелевской премии по физике 1921 года, общественный деятель-гуманист. Жил в Германии, откуда с приходом к власти нацистов был вынужден эмигрировать и был лишён гражданства; Швейцарии, и с 1933 года до конца жизни – в США.

С целью защиты авторских прав

НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Мы рассмотрели выше все необходимые элементы исследования функций одной действительной переменной и теперь можем перейти к построению их графиков (плоских кривых в общем случае).

5.1 Случай явного задания функции

Это наиболее изученный случай. Для построения графика функции $y = f(x)$ необходимо предварительно выполнить её исследование, придерживаясь следующей примерной схемы (порядок пунктов можно менять).

Схема исследования функций одной переменной.

1. *Область определения.* Ищется область определения $D(f)$ функции.
2. *Область значений.* Находится множество значений $E(f)$ функции. Указывается, является ли функция ограниченной (снизу, сверху, с двух сторон). У ограниченной функции находятся её точные грани (если они достигаются, то наименьшее и наибольшее значения). Если сразу найти множество значений функции затруднительно, то к этому пункту возвращаются позже.
3. *Точки пересечения с осями координат.* Определяются точки пересечения графика функции с осями координат, т. е. вычисляются $f(0)$ (если функция определена в этой точке) и нули функции (те значения переменной x , в которых $f(x) = 0$).
4. *Промежутки знакопостоянства.* Находятся промежутки знакопостоянства функции (при каких x функция принимает положительные, а при каких x – отрицательные значения).

5. Оси и центры симметрии. Выясняется, является ли функция $f(x)$ чётной, нечётной или функцией общего вида (т. е. ни чётной, ни нечётной), есть ли у неё другие оси и центры симметрии.

6. Периодичность. Проверяется, является ли функция периодической. Если да, то находится её главный (наименьший положительный) период (если он существует).

7. Непрерывность, точки разрыва. Находятся промежутки непрерывности данной функции и точки разрыва её графика (если они имеются). В каждой точке разрыва указываются левый и правый односторонние пределы функции и её значение в самой точке разрыва (если они определены). Дается характеристика точек разрыва. Ищутся вертикальные асимптоты к графику $f(x)$ (если они имеются).

8. Дифференцируемость. Указываются области, где функция $f(x)$ дифференцируема, вычисляется первая производная $f'(x)$. Отмечаются точки, где производная не существует, но есть односторонние производные (вычисляются в каждой из таких точек правая и левая производные, что поможет более точно изобразить график $f(x)$ в окрестности указанных точек).

9. Монотонность. Если функция дифференцируема, то находятся (по знаку производной) участки монотонности функции, т. е. промежутки её возрастания и убывания (в строгом или нестрогом смысле). В противном случае можно воспользоваться определением.

10. Локальные экстремумы. Функция исследуется на локальные экстремумы (в том числе используя производную и применяя необходимые, а затем достаточные условия экстремума).

11. Поведение на границе области определения. Асимптоты. Исследуется поведение функции в граничных точках области определения. В частности, если функция определена на конечном интервале (a, b) , то следует вычислить односторонние пределы $f(a+0)$, $f(b-0)$ в точках a и b , а если на всей числовой прямой, то пределы функции при $x \rightarrow \pm\infty$. Находятся наклонные асимптоты к графику функции (если функция определена на бесконечном промежутке).

12. Выпуклость и точки перегиба. Функция исследуется на выпуклость и наличие точек перегиба.

Исследование завершается построением эскиза графика.

Замечание. Выше рассмотрен основной подход к исследованию плоских кривых. Наряду с этим на практике используется подход, основанный на применении к известным кривым различных преобразований графиков функций (кривых), таких как растяжение/сжатие, параллельный перенос (вправо/влево, вверх/вниз, вдоль вектора) и поворот.

Рассмотрим пример общего исследования функции.

Пример 104. [8, № 1491] Исследовать функцию и построить её график

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

Решение. Поскольку график строится в прямоугольной системе координат, изображаем две взаимно перпендикулярных оси Ox и Oy .

- 1) *Область определения:* $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
- 2) *Область значений:* позже.
- 3) *Точки пересечения графика с осями координат:* график пересекается с обеими осями в начале координат $(0, 0)$.
- 4) *Знакоопределённость функции:* функция положительна при $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ и отрицательна при $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
- 5) *Оси и центры симметрии.* Функция является нечётной, так как при всех допустимых x выполняется тождество:

$$f(-x) = \frac{(-x)}{\sqrt[3]{(-x)^2 - 1}} = -\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = -f(x).$$

Следовательно, точка $(0, 0)$ – центр симметрии. С учётом этого, можно построить график, например, при $x \geq 0$, а потом достроить центрально симметрично относительно точки $(0, 0)$ в область $x < 0$.

6) *Периодичность.* Функция не является периодической (так как, например, значение, равное нулю, принимает лишь в одной точке).

7) *Непрерывность, классификация точек разрыва.* Функция непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, а в точках $x = \pm 1$ терпит разрыв 2-го рода (бесконечный разрыв), так как

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = -\infty.$$

Очевидно, что функция не ограничена ни снизу, ни сверху и не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений. Отсюда также получаем, что график функции имеет две вертикальные асимптоты: $x = -1$ и $x = 1$ (изображаем пунктирными или штрихпунктирными линиями).

8) *Дифференцируемость.* Функция дифференцируема в любой точке своей области определения, найдём первую производную:

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} - x \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} \cdot 2x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{3\sqrt[3]{(x - 1)^4(x + 1)^4}}, \quad x \neq \pm 1.$$

Можно нарисовать схему знакоопределённости первой производной, указав символически, где она положительна, где отрицательна и где равна нулю.

9) *Монотонность.* По знаку производной определяем промежутки монотонности функции: возрастает при $x > \sqrt{3}$ (а в силу нечётности возрастает и на симметричном промежутке, т. е. при $x < -\sqrt{3}$). На схеме, где уже проставлены знаки производной, указываем эти промежутки монотонности (например, $\nearrow$ – возрастает, $\searrow$ – убывает).

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$
y	$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}, -\infty)$	$(+\infty, 0)$
y'	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
y''	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$

x	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, 3)$	$(3, +\infty)$
y	$(0, -\infty)$	$(+\infty, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$	$(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, +\infty)$
y'	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
y''	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$

Таблица 2: Основные характеристики функции $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

10) *Локальные экстремумы.* Найдём критические точки 1-го рода, в которых производная равна нулю или не существует. В точках $x = \pm 1$ экстремумов быть не может, так как это точки бесконечного разрыва. Стационарных точек две: $x = \pm\sqrt{3}$. В этих точках функция непрерывна, а производная меняет знак, поэтому имеем два локальных экстремума: локальный максимум в точке $-\sqrt{3}$, равный $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ ($\approx -1,38$), и центрально симметричный ему локальный минимум в точке $\sqrt{3}$, равный $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

11) *Поведение на границе. Асимптоты.* Исследуем поведение функции при $x \rightarrow \pm\infty$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \pm\infty$, следовательно, возможны наклонные асимптоты. Будем искать асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ в виде $y = kx + b$, тогда

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} - 0 \cdot x \right) = +\infty.$$

Так как коэффициент b оказался равным бесконечности, то это означает, что наклонной асимптоты при $x \rightarrow +\infty$ график не имеет. Аналогично убеждаемся в том, что нет асимптоты и при $x \rightarrow -\infty$. Таким образом, имеются только две (вертикальные) асимптоты – прямые $x = \pm 1$.

12) *Выпуклость, точки перегиба.* Наконец, исследуем функцию на выпуклость и наличие точек перегиба. Для этого вычислим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 3}{3(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} \right)' = \dots = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x(x-3)(x+3)}{\sqrt[3]{(x-1)^7(x+1)^7}}, \quad x \neq \pm 1.$$

По знаку второй производной определяем промежутки выпуклости вверх и вниз: функция выпукла вниз при $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, 3)$ и выпукла вверх при



Рис. 62: График функции $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

$x \in (-3, -1) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$. При этом в точках $x = 0$, $x = \pm 3$ вторая производная равна нулю и меняет знак, что означает, что точки $(0, 0)$, $(3, \frac{3}{2})$, $(-3, -\frac{3}{2})$ являются точками перегиба графика функции. Выпуклость вверх обозначаем символом $\frown$, а выпуклость вниз — символом $\smile$.

Поведение функции отражено в сводной таблице (Таб. 2):¹

Не забудем указать область значений функции: $E(y) = \mathbb{R}$. Опираясь на результаты исследований, строим график функции (Рис. 62).

На графике рядом с осями координат должны быть указаны все основные числовые характеристики (положения экстремумов и их значения, точки пересечения с осями, точки перегиба и проч.) $\square$

5.2 Параметрический способ задания кривой

«Научиться можно только тому, что любишь».

И. Гёте (1749–1832), немецкий писатель, мыслитель, философ и естествоиспытатель, государственный деятель.

Приведённая выше схема исследования, за исключением отдельных нюансов, соблюдается и при построении кривых, заданных параметрически. Продемонстрируем особенности исследования таких кривых на примере.

Пример 105. [8, № 1532] Исследовать и построить кривую

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

¹В таблице интервалы как таковые присутствуют только в первой строке (для переменной x), во второй строке (для переменной y) указаны не промежутки, а соответствующие диапазоны изменения этой переменной.

Решение. Исследуем кривую, придерживаясь схемы и опуская малосущественные или очевидные (например, непериодичность) пункты.

1) *Область определения.* Функция $x(t)$ определена (и непрерывна) при $t \in \mathbb{R}$, причём, в силу представления $x = 1 - (t-1)^2$, принимает значения $x \leq 1$. Следовательно, функция $y = y(x)$ определена при $x \in (-\infty, 1]$.

2) *Множество значений.* Функция $y(t)$ также определена (и непрерывна) при всех $t \in \mathbb{R}$, принимает все действительные значения, а значит, областью значений функции $y = y(x)$ есть множество $\mathbb{R}$. Таким образом, кривая неограничена (и непрерывна).

3) *Точки пересечения кривой с осями координат.* Найдём точки пересечения с осью Ox (нули функции):

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t = -\sqrt{3}, \\ t = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -2\sqrt{3} - 3, \\ x = 2\sqrt{3} - 3, \end{cases}$$

откуда находим точки $(0, 0)$, $(-2\sqrt{3} - 3, 0)$ и $(2\sqrt{3} - 3, 0)$.

Пересечение с осью Oy : $x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ и $t = 2$, откуда получаем две точки $(0, 0)$ и $(0, -2)$.

4) *Асимптоты.* Покажем, что кривая не имеет асимптот. В самом деле, предположим, что имеется какая-либо асимптота, но тогда должно найтись такое t_0 , что при $t \rightarrow t_0$ выполнялось бы $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow \pm\infty$ (для вертикальной асимптоты), или $x \rightarrow \pm\infty$ и $y \rightarrow y_0$ (для горизонтальной асимптоты), или $x \rightarrow \pm\infty$ и $y \rightarrow \pm\infty$ (для наклонной асимптоты). Однако в данном случае $y \rightarrow \pm\infty$ только при $t \rightarrow \pm\infty$, но при этом угловой коэффициент асимптоты бесконечен:

$$k = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{3t - t^3}{2t - t^2} = \pm\infty,$$

т. е. асимптот нет.

5) *Дифференцируемость. Монотонность.* Найдём первую производную (при $t \neq 1$):

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3(1-t)(1+t)}{2(1-t)} = \frac{3}{2}(1+t), \quad t \neq 1.$$

При $t < -1$ производная отрицательна (функция $y(x)$ убывает); при $t = -1$ ($x = -3$, $y = -2$) производная обращается в нуль; при $t \in (-1, 1)$ и при $t \in (1, +\infty)$ производная положительна (функция возрастает); в точке $t = 1$ ($x = 1$, $y = 2$) производная имеет устранимый разрыв, причём $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} = 3$.

6) *Локальные и краевые экстремумы.* Таким образом, в точке $t = -1$ функция имеет локальный минимум, равный (-2) , а в точке $t = 1$ имеется точка возврата 1-го рода (как увидим дальше, в соответствующей точке $(1, 2)$ сходятся, имея общую касательную с угловым коэффициентом, равным 3, две ветви с разными направлениями выпуклости). Точке $t = 1$ ($x = 1$) отвечает краевой максимум, равный 2.

7) Исследуем на *выпуклость*. Найдём вторую производную:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{3(1-t)^2}{4(1-t)^3} = \frac{3}{4(1-t)}, \quad t \neq 1.$$

При $t < 1$ кривая выпукла вниз, а при $t > 1$ она выпукла вверх. Вторая производная имеет разрыв в точке $t = 1$, где перегиба нет.

Составим сводную таблицу (Таб. 3), включив в неё для удобства построения кривой все полученные результаты исследования.¹

t	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, +\infty)$
y	$(+\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, -\infty)$
y'	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
y''	$\smile$	$\smile$	$\smile$

Таблица 3: Основные характеристики ветвей.

Кривая состоит из трёх ветвей. Первой ветви отвечает первый столбец. Видно, что когда параметр t меняется от $-\infty$ до -1 , то значение x увеличивается от $-\infty$ до -3 , а значение y уменьшается от $+\infty$ до -2 . То есть данная ветвь кривой идёт из верхнего левого угла в точку с координатами $(-3, -2)$, пересекая ось абсцисс в точке $(-2\sqrt{3}-3, 0)$. При этом кривая на рассматриваемом участке имеет выпуклость, направленную вниз.

Второй ветви кривой соответствует второй из столбцов. Видим, что когда параметр t меняется от -1 до 1 , то x увеличивается от -3 до 1 , а y возрастает от -2 до 2 . То есть эта ветвь выходит из точки $(-3, -2)$ и, проходя через начало координат (значение $t = 0$ попадает в интервал $(-1, 1)$), приходит в точку с координатами $(1, 2)$. Этот участок кривой также имеет выпуклость, направленную вниз.

Наконец, третья и последняя ветвь кривой выходит (непрерывным образом) из точки $(1, 2)$ и идёт влево и вниз с выпуклостью вверх, пересекая в третий раз ось абсцисс в точке $(2\sqrt{3}-3, 0)$ и пересекая ось ординат в точке $(0, -2)$.

Осталось объединить все ветви. Кривая построена (Рис. 28). $\square$

Пример 106. Это забавно: параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = 25 \sin^3 t, \\ y = 18 \cos t - 7 \cos 2t - 2 \cos 3t - \cos 4t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

задают хорошо узнаваемую кривую (Рис. 63). $\square$

¹В таблице интервалы присутствуют только в первой строке (для параметра t), во второй и третьей строках (для переменных x и y) указаны не промежутки, а соответствующие диапазоны изменения этих переменных.

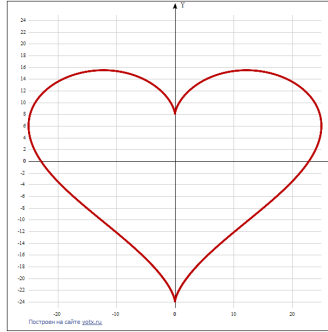


Рис. 63: «Сердце».

5.3 Неявный способ задания кривой

«Делай что должно, и будь что будет».

Марк Аврелий (121–180) – древнеримский император, философ.

Общий подход к исследованию остаётся верным и при построении кривых, заданных неявно. Конечно, есть возможность находить производные у неявно заданных функций, однако в большинстве случаев в этой ситуации рекомендуется параметризовать кривую, найдя её параметрические уравнения, и уже затем исследовать.

Рассмотрим пример построения кривой в случае её неявного задания.

Пример 107. [8, № 1541] Исследовать и построить кривую ($a > 0$):

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (\text{декартов лист}).$$

Указание: для параметризации положить $y = tx$.

Решение. Кривая задана неявно, поэтому для её дальнейшего исследования найдём параметрические уравнения кривой. Для этого положим в уравнении $y = tx$:

$$x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x(1+t^3) - 3at) = 0.$$

Отсюда либо $x = 0$ ($\Rightarrow y = 0$, т. е. точка $(0, 0)$ принадлежит кривой), либо

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad \text{и тогда} \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad \text{где } t \neq -1.$$

Это и есть параметрические уравнения декартова листа.

Исследуем кривую.

1) *Область определения, множество значений.* Функции $x(t)$, $y(t)$ определены (и непрерывны) при $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, и принимают все действительные значения (объясните, почему), т. е. $D(y) = E(y) = \mathbb{R}$, кривая неограничена (ни по x , ни по y).

2) Найдём *точки пересечения кривой с осями координат*:

$$Ox: \quad y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$Oy: \quad x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \Rightarrow y = 0,$$

откуда находим единственную точку $(0, 0)$, в которой кривая одновременно пересекает обе координатные оси.

3) Найдём *асимптоты*. Для этого отберём все значения t_0 такие, что при $t \rightarrow t_0$ выполнялось бы $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow \pm\infty$ (для вертикальной асимптоты), или $x \rightarrow \pm\infty$ и $y \rightarrow y_0$ (для горизонтальной асимптоты), или $x \rightarrow \pm\infty$ и $y \rightarrow \pm\infty$ (для наклонной асимптоты). Имеем в данном случае, что $y \rightarrow \pm\infty$ (аналогично для x) только при $t \rightarrow -1 \pm 0$. Найдём угловой коэффициент и свободный член асимптоты (они, как можно увидеть, не зависят от того, с какой стороны t приближается к (-1)):

$$k = \lim_{t \rightarrow -1 \pm 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -1 \pm 0} t = -1;$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{t \rightarrow -1 \pm 0} (y(t) - (-1)x(t)) = \lim_{t \rightarrow -1 \pm 0} (x(t)(1+t)) = \lim_{t \rightarrow -1 \pm 0} \frac{3at(1+t)}{1+t^3} = \\ &= \lim_{t \rightarrow -1 \pm 0} \frac{3at}{t^2 - t + 1} = -a. \end{aligned}$$

Таким образом, имеется единственная наклонная асимптота с уравнением

$$y = kx + b = -x - a.$$

4) *Дифференцируемость*. Вычислим первую производную (при $t \neq -1; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$):

$$y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad x'_t = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

5) *Выпуклость, точки перегиба*. Для исследования на выпуклость нам понадобится вторая производная:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}\right)'_t}{\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}} = \frac{\frac{2(t^3+1)^2}{(1-2t^3)^2}}{\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}} = \frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3}.$$

Соберём все критические точки (в которых эти производные равны нулю или не существуют):

$$\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0; \\ t = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x = a\sqrt[3]{2}, y = a\sqrt[3]{4}. \\ t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow x = a\sqrt[3]{4}, y = a\sqrt[3]{2}. \end{cases}$$

t	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
x	$(+0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(0, a\sqrt[3]{4})$	$(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$	$(a\sqrt[3]{2}, +0)$
y	$(-0, -\infty)$	$(+\infty, 0)$	$(0, a\sqrt[3]{2})$	$(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$	$(a\sqrt[3]{4}, +0)$
y'	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
y''	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$

Таблица 4: Пять ветвей декартова листа.

Эти точки $0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}$ вместе с точкой $t = -1$ разбивают все значения действительного параметра на 5 интервалов, каждому из которых отвечает свой участок (ветвь) непрерывной кривой.

Для удобства построения кривой составим сводную таблицу (Таб. 4):

Каждому столбцу в таблице соответствует ветвь кривой.

Построим первую ветвь графика. Из 1-го столбца видим, что этой ветви отвечает изменение параметра t от $-\infty$ до -1 . Кривая выходит из точки $(0, 0)$, при этом x возрастает от $+0$ до $+\infty$, а y убывает от -0 до $-\infty$, и кривая выпукла вниз. Поскольку кривая имеет асимптоту, то данная ветвь стремится к этой асимптоте (направо вниз, находясь в 4-й четверти) с ростом x к $+\infty$, а y к $-\infty$. Нарисовали эту ветвь.

Переходим к изображению второй ветви, отвечающей изменению параметра в пределах интервала $(-1, 0)$. С увеличением значения t соответствующая точка движется по кривой слева направо (т. к. x возрастает от $-\infty$ до -0) и при этом сверху вниз (т. к. y убывает от $+\infty$ до $+0$), выпуклость направлена вниз. Поскольку кривая имеет асимптоту, то эта ветвь стремится к асимптоте при $t \rightarrow -1 + 0$ (точка при этом движется влево и вверх), а при $t \rightarrow 0$ приходит в начало координат $(0, 0)$. Нарисовали вторую ветвь.

Для построения третьей ветви графика заметим, что это конечная дуга, соединяющая точки $(0, 0)$ и $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$ (отметим эти точки). При этом при движении от первой из точек ко второй x и y увеличиваются, а выпуклость направлена вниз. Изображаем эту дугу.

Четвёртая ветвь отвечает изменению параметра от $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ до $\sqrt[3]{2}$, при этом x уменьшает своё значение с $\sqrt[3]{4}$ до $\sqrt[3]{2}$, а y , наоборот, увеличивает с $\sqrt[3]{2}$ до $\sqrt[3]{4}$. Поставим граничные точки и плавно соединим их дугой с выпуклостью вверх.

И, наконец, построим последнюю ветвь. Она выходит из точки $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ и приходит в точку $(0, 0)$ (движение справа налево и сверху вниз), выпуклость этого участка направлена вверх.

Объединяя все пять участков, получаем полную кривую. При аккуратном изображении она должна получиться симметричной относительно прямой $y = x$ (это видно и из вида исходного неявного уравнения, так как замена x на y , а y на x не меняет уравнения). Декартов лист изображён на Рис. 12. $\square$

5.4 Задачи для самостоятельного решения

«Россия не будет прятаться и замыкаться в области науки, но публикации в иностранных научных журналах не могут быть главным критерием для исследований, настоящие работы пробьют себе дорогу куда угодно».

*В.В. Путин, президент РФ, 8 февраля 2023 г.,
на заседании Совета по науке и образованию.*

Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить её график, если функция задана явным уравнением:

№192. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($a > 0$) (цепная линия);

№193. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ (локон Аньёзи);

№194. $y = 3^{\frac{x+2}{3x-4}}$;

№195. [8, № 1471] $y = 3x - x^3$;

№196. $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$;

№197. [8, № 1477] $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$;

№198. [8, № 1483] $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$;

№199. [8, № 1490] $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}$;

№200. [8, № 1501] $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

№201. [8, № 1505] $y = 2x - \operatorname{tg} x$;

№202. [8, № 1507] $y = (1+x^2)e^{-x^2}$;

№203. [8, № 1508] $y = x + e^{-x}$;

№204. [8, № 1512] $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

№205. [8, № 1513] $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

№206. [8, № 1516] $y = x + \operatorname{arctg} x$;

№207. [8, № 1522] $y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$;

№208. $y = \ln(x + \ln(x + \ln(x + \dots)))$ ($x \geq 1$).

Исследовать функцию и построить её график, если функция задана параметрически или неявным уравнением:

№209. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (a > 0, \text{ циклоида});$

№210. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (a > 0, \text{ астроида});$

№211. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$, астроида);

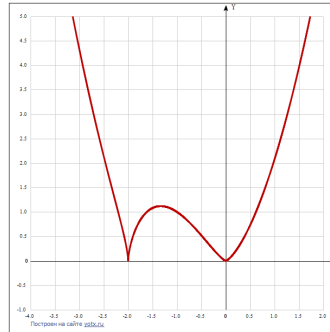


Рис. 64: Подбери уравнение для кривой!

№212. [8, № 1531] $x = \frac{(t+1)^2}{4}, y = \frac{(t-1)^2}{4};$

№213. [8, № 1535] $\begin{cases} x = t + e^{-t}, \\ y = 2t + e^{-2t}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

№214. $\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = \left(\frac{t-1}{t}\right)^2 \end{cases}$ (на наличие самопересечений не исследовать).

№215. $x = a \cos 2t, y = a \cos 3t,$ где $t \in \mathbb{R};$

№216. $\begin{cases} x = a \cos t + b \sin t, \\ y = b \cos t - a \sin t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

№217. Как параметрически задать окружность радиуса $R = a$ с центром в точке (x_0, y_0) ?

Исследовать (неэлементарную) функцию и построить её график, не используя производной:

№218. $y = \sqrt{2 \cos x + 2\sqrt{2 \cos x - 1}} + \sqrt{2 \cos x - 2\sqrt{2 \cos x - 1}};$

№219. $y = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} ((1+x) \operatorname{th} \lambda x).$

№220. Какой из функций наиболее соответствует график на Рис. 64:

1) $y = \sqrt[3]{(x+2)x^2};$ 2) $y = \sqrt[3]{(x+2)^2x^5};$ 3) $y = \sqrt[3]{(x+2)^4x^5};$

4) $y = \sqrt[3]{(x+2)^5x};$ 5) $y = \sqrt[3]{(x+2)^4x^2};$ 6) $y = \sqrt[3]{(x+2)^2x^4};$

7) $y = \sqrt[3]{(x+2)^4x};$ 8) $y = \sqrt[3]{(x+2)x^5}?$

№221. Построить эскиз графика функции $y = f(x)$, если известно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, D(f) = E(f) = \mathbb{R}, x_{\max} = 3, y_{\max} > 0, x_{\min} = 4, y_{\min} > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = -1,$ функция выпукла вверх на $(-\infty, -2] \cup [-1, \frac{7}{2}] \cup [5, +\infty).$

5.5 Ответы и решения

192. Функция непрерывна, дифференцируема, является чётной (т. к. при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо тождество $y(-x) \equiv y(x)$), поэтому достаточно исследовать кривую при $x \geq 0$, а затем симметрично отразить построенный график в левую полуплоскость. Найдём производную: $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$. Опираясь на свойства гиперболического синуса, имеем: $y' \geq 0$ при $x \geq 0$, причём производная равна нулю лишь в точке $x = 0$. Следовательно, функция строго возрастает при $x \geq 0$. В силу чётности при $x < 0$ функция убывает. Функция имеет единственный экстремум – локальный минимум, равный 1, в точке $x = 0$. Функция ограничена снизу и не ограничена сверху. Асимптот нет (докажите). Кривая изображена на Рис. 11.

193. $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = (0, a]$. Функция ограничена, положительная, является чётной, дифференцируемой. Стационарная точка: $y'(x) = -\frac{2a^3x}{(x^2 + a^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Функция возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$, в точке $x = 0$ имеет строгий локальный максимум (достигает наибольшего значения), равный a . Точная нижняя грань равна 0 и не достигается. Асимптота $y \equiv 0$. Вторая производная $y''(x) = 2a^3 \frac{a^2 - 3x^2}{(x^2 + a^2)^3}$, функция выпукла вверх при $x \in \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, выпукла вниз при $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$. Точки перегиба $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$. Кривая изображена на Рис. 65.

194. Функция определена всюду, кроме точки $x = \frac{4}{3}$, имеет две асимптоты: вертикальную $x = \frac{4}{3}$ и горизонтальную $y = \sqrt[3]{3}$ (при $x \rightarrow \pm\infty$). График состоит из двух ветвей. Первая ветвь определена при $x \in (-\infty, \frac{4}{3})$, график приближается снизу к горизонтальной асимптоте при $x \rightarrow -\infty$, и стремится к точке $(\frac{4}{3}, 0)$ при $x \rightarrow \frac{4}{3} - 0$, сохраняя на всём участке выпуклость вверх.

Вторая ветвь расположена в 1-й четверти (по отношению к асимптотам). При $x \rightarrow \frac{4}{3} + 0$ график стремится вертикально вверх, приближаясь к асимптоте. При $x \rightarrow +\infty$ график приближается сверху к горизонтальной асимптоте, везде на этом участке сохраняя выпуклость вниз.

Точек перегиба нет, локальных экстремумов нет. Функция не ограничена сверху, но ограничена снизу (точная нижняя грань равна 0, не достигается). Область значений $E(y) = (0, \sqrt[3]{3}) \cup (\sqrt[3]{3}, +\infty)$. Каждая ветвь непрерывна и дифференцируема. Точка $x = \frac{4}{3}$ является разрывом 2-го рода (правый предел равен бесконечности). Кривая изображена на Рис. 66.

195. Нули функции: $y = x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) = 0$. Производные $y' = 3(1 - x)(1 + x)$, $y''(x) = -6x$. Функция нечётная (имеет центр симметрии $(0, 0)$), убывает при $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ и возрастает на оставшемся промежутке. Имеет строгие локальные экстремумы: минимум $f(-1) = -2$ и максимум $f(1) = 2$. Выпукла вниз при $x < 0$ и выпукла вверх при $x > 0$,

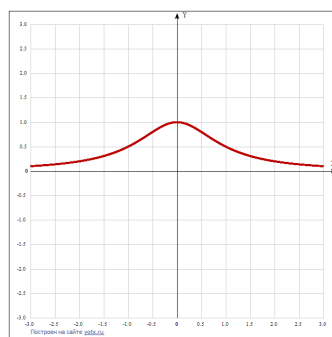


Рис. 65: Кривая $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ (локон Аньёзи)

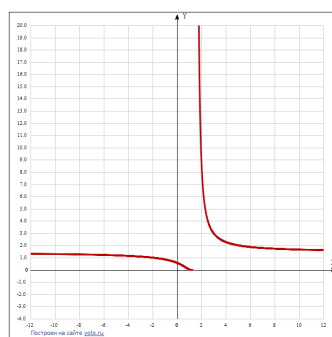


Рис. 66: Кривая $y = 3^{\frac{x+2}{x-4}}$

Рис. 67: Кривая $y = 3x - x^3$

$x = 0$ – точка перегиба. Асимптоты: вертикальных, очевидно, нет. Найдём наклонные: при $x \rightarrow +\infty$ имеем $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - x^3}{x} = -\infty,$$

следовательно, наклонных асимптот также нет. При этом $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$ (функция не ограничена ни снизу, ни сверху). Кривая изображена на Рис. 67.

196. 1) Область определения: $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Точки разрыва: $x = \pm 1$, для определения характера точек разрыва вычислим одно-сторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1 - 0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm 1 + 0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Следовательно, в точках $x = \pm 1$ имеем разрывы 2-го рода и вертикальные асимптоты $x = \pm 1$, не существуют наименьшее и наибольшее значения, функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

2) Точки пересечения с осями координат. Ox : $y = 0 \Rightarrow x = 0$, т. е. точка $(0, 0)$. Oy : $x = 0 \Rightarrow y = 0$, та же точка начала координат.

3) Функция нечётная, т. к. при всех $x \in D(f)$ имеем $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -y(x)$. Точка $(0, 0)$ – центр симметрии.

4) Функция непрерывна и дифференцируема на $D(f)$. Исследуем на монотонность и локальные экстремумы. Поскольку $y'(x) = \frac{x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$, то критические точки 1-го рода: $x = \pm\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \pm 1$. Исследуя знак производной на интервалах, на которые критические точки делят область определения функции (нарисуйте схему знакоопределённости первой производной), определяем, что функция возрастает на интервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, +\infty)$, убывает

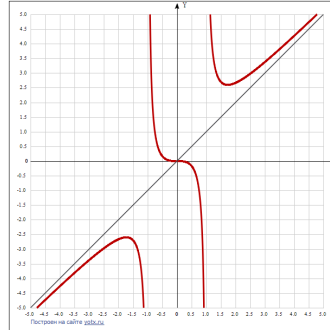


Рис. 68: Кривая $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

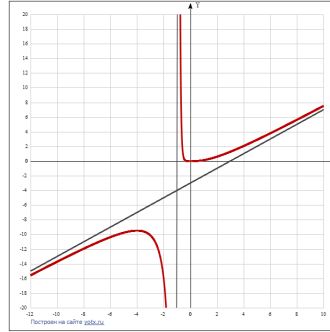
на интервалах $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \sqrt{3})$. Функция имеет локальный минимум при $x = \sqrt{3}$, причём $y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, локальный максимум при $x = -\sqrt{3}$, где $y(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычислим вторую производную: $y''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$. Находим критические точки 2-го рода: $x = 0$, $x = \pm 1$. Исследуя знак производной на интервалах, на которые критические точки делят область определения функции (нарисуйте схему знакоопределённости второй производной), определяем, что функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$, выпукла вниз на интервалах $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$. Точка перегиба: $(0, 0)$.

6) Наклонную асимптоту ищем в виде $y = kx + b$ (одна и та же при $x \rightarrow \pm\infty$): $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = 0$, следовательно, имеем наклонную асимптоту $y = x$.

7) Строим график функции, отмечая ключевые точки (Рис. 68).

197. Функция определена всюду, кроме точки $x = -1$. График пересекает (или касается – выясним позже) координатные оси в начале координат, т. е. единственный нуль функции – это $x = 0$. Функция принимает положительные значения при $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ и отрицательные при $x \in (-\infty, -1)$. Имеем $y' = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$. Функция возрастает при $x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ и убывает при $x \in (-4, -1) \cup (-1, 0)$. Имеет (строгий) локальный максимум $f(-4) = -9\frac{13}{27}$ и локальный минимум $f(0) = 0$. Так как $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow -1 + 0$, то прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота ($y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -1 - 0$), следовательно, точка разрыва 2-го рода (бесконечный разрыв). Будем искать наклонную

Рис. 69: Кривая $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$

асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ в виде $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x(1+x)^3} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4}{(1+x)^3} - x \right) = -3,$$

следовательно, имеем асимптоту $y = x - 3$. Та же асимптота и при $x \rightarrow -\infty$.

Поскольку $y'' = \frac{12x^2}{(1+x)^5}$, то отсюда находим, что функция выпукла вверх при $x \in (-\infty, -1)$ и выпукла вниз при $x \in (-1, +\infty)$. Точек перегиба нет. Центра симметрии нет, т. к. это могла быть только точка $(-1, -4)$, но $y(-1+x) - (-4) \neq -4 - y(-1-x)$. Кривая изображена на Рис. 69.

198. Функция определена всюду, кроме $x = 0, \pm 1$. Так как $f(-1-0) = f(1+0) = f(\pm 0) = -\infty$, $f(-1+0) = f(1-0) = +\infty$, то прямые $x = \pm 1; 0$ – вертикальные асимптоты и $x = \pm 1; 0$ – точки разрыва 2-го рода (бесконечного разрыва), следовательно, функция не ограничена ни снизу, ни сверху. Найдём нули (точки пересечения с осью абсцисс): $y = \frac{2(8x^2 - 5)}{3x^2(1 - x^2)} = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{8}} \approx \pm 0,79$. Функция чётная, график симметричен относительно оси ординат (с учётом этого можно было исследовать при $x \geq 0$). Функция принимает положительные значения при $x \in (-1, -\sqrt{\frac{5}{8}}) \cup (\sqrt{\frac{5}{8}}, 1)$ и отрицательные при $|x| > 1$ и $x \in (-\sqrt{\frac{5}{8}}, 0) \cup (0, \sqrt{\frac{5}{8}})$. Непрерывна и дифференцируема на всей области определения, $y' = \frac{4(8x^4 - 10x^2 + 5)}{3x^3(1-x)^2(1+x)^2}$. Функция возрастает при $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ и убывает на симметричных промежутках (при

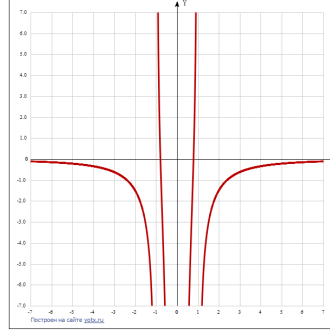


Рис. 70: Кривая $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$). Стационарных точек нет. Локальных экстремумов нет. Будем искать наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ в виде $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{10}{3x^3} + \frac{1}{x(1-x)} \right) = 0,$$

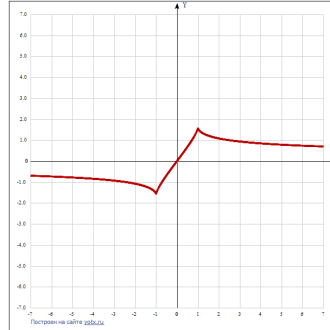
(возможна горизонтальная асимптота)

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x} \right) = 0,$$

следовательно, имеем асимптоту $y \equiv 0$. В силу чётности, та же асимптота будет и при $x \rightarrow -\infty$. Вычислим вторую производную: $y'' = \frac{4(2x^2 - 1)(4x^4 - 5x^2 + 5)}{x^4(1 - x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Поэтому функция вы-

пукла вверх при $|x| > 1$ и $x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, и выпукла вниз при $x \in \left(-1, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 1\right)$. Точки перегиба: $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, -2\frac{2}{3}\right)$. Эскиз кривой изображён на Рис. 70.

199. $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [-\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}]$. Функция ограничена. Найдём производную: $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$. Нарисовав схему знакоопределённости производной, находим, что функция убывает при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и возрастает на интервале $(-1, 1)$, причём производная не существует в точках $x = \pm 1$. Локальные экстремумы (наибольшее и наименьшее значения): $y_{\max} = y(1) = \sqrt[3]{4}$, $y_{\min} = y(-1) = -\sqrt[3]{4}$. Функция нечётная, т. к. при всех $x \in \mathbb{R}$ имеем $y(-x) = -y(x)$. Вторая производная $y'' = \frac{2}{9} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x+1)^4} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^4}}$. Выпуклость вверх при $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, выпуклость вниз при $x \in (0, 1) \cup$

Рис. 71: Кривая $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}$

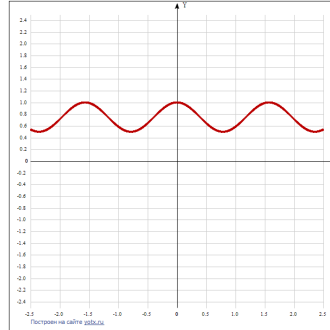
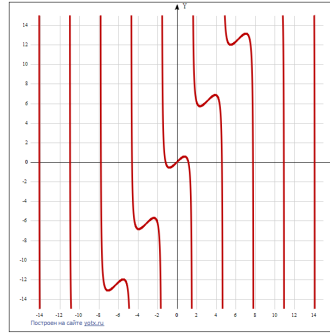
$(1, +\infty)$; точка перегиба: $(0, 0)$. Предел при $x \rightarrow \infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ (следовательно, $y \equiv 0$ – горизонтальная асимптота). Эскиз кривой изображён на Рис. 71.

200. Преобразуем функцию:

$$y = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

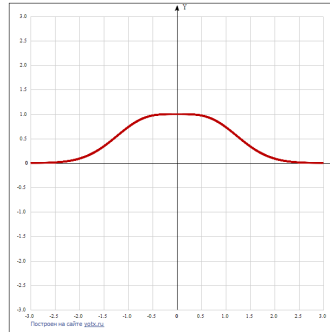
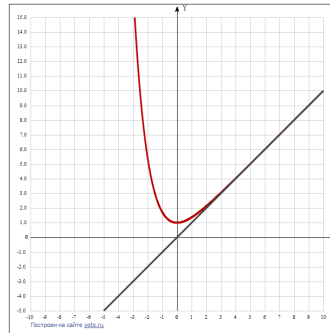
$D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [\frac{1}{2}, 1]$. Функция ограниченная, непрерывная, дифференцируемая и периодическая с периодом $T = \pi/2$. Функция чётная и положительная. Стационарные точки: $y' = -\sin 4x = 0 \Rightarrow x = \pi n/4$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция возрастает при $x \in [\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}]$, $n \in \mathbb{Z}$; убывает при $x \in [\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}]$. Локальные минимумы $y_{\min} = y(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}) = \frac{1}{2}$, локальные максимумы $y_{\max} = y(\frac{\pi n}{2}) = 1$. Наибольшее и наименьшее значения достигаются в точках локального экстремума. $y'' = -4 \cos 4x \Rightarrow$ выпуклость вверх при $x \in [-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}]$, выпукла вниз при $x \in [\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}]$, точки перегиба $(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \frac{3}{4})$. Эскиз кривой изображён на Рис. 72.

201. $D(y) : x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (точки разрыва 2 рода); $E(y) = \mathbb{R}$. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху. Вертикальные асимптоты: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Функция дифференцируема на своей области определения. $y'(x) = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. Функция нечётная. Центры симметрии $(\pi n, 2\pi n)$, т. к. $y(\pi n + x) - 2\pi n \equiv 2\pi n - y(\pi n - x)$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$). Локальные максимумы $y_{\max} = y(\frac{\pi}{4} + \pi n) = \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi n$, локальные минимумы $y_{\min} = y(-\frac{\pi}{4} + \pi n) = -(\frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi n)$. Вторая производная $y''(x) = -\frac{\sin 2x}{\cos^4 x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi n}{2}$. Точки перегиба $(\pi n, 2\pi n)$. Эскиз кривой см. на Рис. 73.

Рис. 72: Кривая $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ Рис. 73: Кривая $y = 2x - \operatorname{tg} x$

202. $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = (0, 1]$. Функция ограничена, является чётной, дифференцируемой. Стационарная точка: $y'(x) = -2x^3 e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Возрастает при $x \in (-\infty, 0)$, убывает при $0, +\infty$, локальный максимум $y_{\max} = y(0) = 1$, совпадает с наибольшим значением функции. Функция положительна, горизонтальная асимптота $y \equiv 0$. Вторая производная $y''(x) = 4x^2 e^{-x^2} \left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Выпукла вверх при $x \in \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, выпукла вниз при $|x| > \sqrt{\frac{3}{2}}$, точки перегиба $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}e^{-3/2}\right)$, где $\frac{5}{2}e^{-3/2} \approx 0,56$. Эскиз графика изображён на Рис. 74.

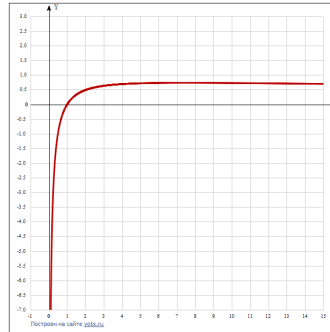
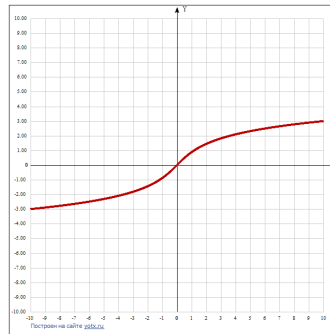
203. $D(y) = \mathbb{R}$. Покажем, что функция положительна при всех $x \in \mathbb{R}$. При $x \geq 0$ это очевидно. При $x < 0$ положим $t = -x > 0$, тогда получим функцию $f(t) = e^t - t$, $t > 0$. Обозначим $\varphi(t) = e^t$, $\psi(t) = t$. Поскольку $\varphi(0) > \psi(0)$, $\varphi'(t) > \psi'(t)$ при $t > 0$, то в силу задачи №1288 (Демидович Б.П.) $\varphi(t) > \psi(t)$ при $t > 0$, т. е. $f(t) > 0 \Rightarrow y(x) > 0$ при $x < 0$. Функция ограничена снизу,

Рис. 74: Кривая $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$ Рис. 75: Кривая $y = x + e^{-x}$

непрерывна, дифференцируема. Стационарные точки: $y'(x) = 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Функция убывает при $x < 0$ и возрастает при $x > 0$, в точке $x = 0$ имеет строгий локальный минимум, равный 1. $E(y) = [1, +\infty)$. Вторая производная $y''(x) = e^{-x} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ функцию всюду выпукла вниз, точек перегиба нет. Асимптота $y = x$ при $x \rightarrow +\infty$. Эскиз кривой изображён на Рис. 75.

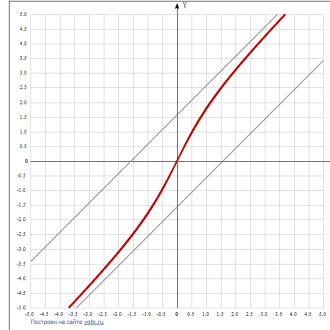
204. $D(y) = (0, +\infty)$, нуль функции $x = 1$. Функция непрерывна и дифференцируема, $y'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}$, единственная стационарная точка $x = e^2$. Функция возрастает при $x \in (0, e^2)$, убывает при $x \in (e^2, +\infty)$, локальный максимум (наибольшее значение функции) в точке $x = e^2$, равный $2/e \approx 0,74$ (функция ограничена сверху). Асимптоты: $x = 0$ при $x \rightarrow +0$, $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Вторая производная $y''(x) = \frac{3(\ln x - \frac{8}{3})}{4x^{5/2}}$, выпукла вверх при $x \in (0, e^{8/3})$, выпукла вниз при $x \in (e^{8/3}, +\infty)$. Точка перегиба $(e^{8/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3})$, где $e^{8/3} \approx 14,33$, $\frac{8}{3}e^{-4/3} \approx 0,7$. Эскиз кривой изображён на Рис. 76.

205. Эта функция называется «Ареасинус» ($\text{Arsh } x$) – обратная функция к

Рис. 76: Кривая $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ Рис. 77: Кривая $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

гиперболическому синусу. $D(y) = E(y) = \mathbb{R}$, функция не ограничена, непрерывна и дифференцируема, $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \Rightarrow$ функция всюду возрастает, экстремумов нет. Функция нечётная. Ноль функции $x = 0$. Вторая производная $y''(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$, функция выпукла вниз при $x < 0$, выпукла вверх при $x > 0$, точка перегиба $(0, 0)$. Асимптот нет. Эскиз кривой изображён на Рис. 77.

206. $D(y) = E(y) = \mathbb{R}$. Функция непрерывна и дифференцируема, $y'(x) = \frac{2 + x^2}{1 + x^2} > 0 \Rightarrow$ функция всюду возрастает, экстремумов нет. Функция нечётна (имеет центр симметрии в начале координат), не ограничена. Ноль функции $x = 0$. Вторая производная $y''(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$, функция выпукла вниз при $x < 0$, выпукла вверх при $x > 0$, точка перегиба $(0, 0)$. Асимптоты: $y = x - \frac{\pi}{2}$

Рис. 78: Кривая $y = x + \operatorname{arctg} x$

при $x \rightarrow -\infty$, $y = x + \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$. Эскиз кривой изображён на Рис. 78.

207. Функция определена, непрерывна и положительна при $|x| \geq 1$, причём при указанных x значения $y \geq 1$. Функция чётна (имеет ось симметрии $x = 0$), $y(-1 - 0) = y(1 + 0) = 2^{\sqrt{2}}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y \equiv 1$ – асимптота. Функция дифференцируема при $|x| > 1$, $y'(x) = y \cdot x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right) \ln 2$. Функция возрастает при $x \in (-\infty, -1)$, убывает при $x \in (1, +\infty)$, в точках $x = \pm 1$ имеет краевой максимум, равный $2^{\sqrt{2}}$. $E(y) = (1, 2^{\sqrt{2}}]$. Вторая производная:

$$y''(x) = y \cdot \ln 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + x^2 \ln 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right)^2 + \right. \\ \left. + x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \right) \right) >$$

(отбросим положительное слагаемое $x^2 \ln 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right)^2$)

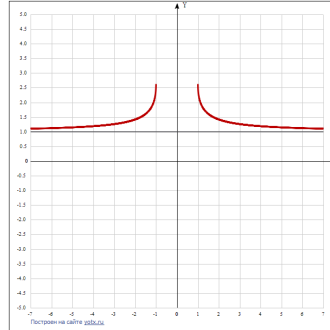
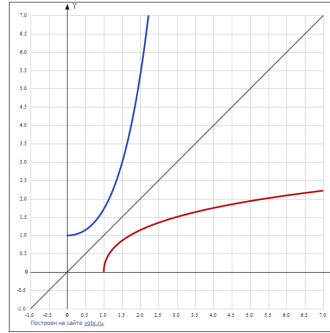
$$> y \cdot \ln 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \right) =$$

(группируя в скобках первое слагаемое с последним, а второе – с третьим, получим)

$$= y \cdot \ln 2 \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \right) > 0,$$

следовательно, функция выпукла вниз. Эскиз кривой изображён на Рис. 79.

208. Заметим, уравнение можно переписать в неявном виде $y = \ln(x + y)$.

Рис. 79: Кривая $y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ Рис. 80: Кривая $y = \ln(x + \ln(x + \ln(x + \dots)))$, над ней $y = e^x - x$

1-й способ. Для построения графика параметризуем эту кривую, положив $x + y = t$:
$$\begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = \ln t \quad (t \geq 1). \end{cases} \quad \text{Тогда } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{t-1}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{t}{(t-1)^3}.$$

При $t = 1$ имеем $x = 1$, при $t > 1$ имеем $x > 1$ ($t - \ln t > 1$, т. к. $(t - \ln t)'_t > 0$). В точке $x = 1$ имеем $y = 0$, затем функция возрастает (можно подставить пробные точки), выпуклость вверх. Постройте эскиз графика самостоятельно.

2-й способ. Имеем $y = \ln(x + y) \Leftrightarrow e^y = x + y$, откуда находим $x = e^y - y$, $y \geq 0$, т. е. обратная функция $f^{-1}(x) = e^x - x$, $x \geq 0$. Функция $f^{-1}(x)$ возрастает (производная положительна), а значит, и исходная функция $f(x)$ является возрастающей. График $y = f(x)$ симметричен графику $y = f^{-1}(x)$ относительно $y = x$. Графики этих взаимно обратных функций изображены на Рис. 80.

209. Данная система задаёт кривую $y = y(x)$. Исследуем её.

1) *Область определения.* Функция $x(t)$ определена при всех $t \in \mathbb{R}$, причём принимает все значения $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, функция $y = y(x)$ определена на множестве $\mathbb{R}$.

2) *Множество значений. Ограниченность.* Функция $y(t)$ также определена при всех $t \in \mathbb{R}$, принимает значения от 0 до $2a$ включительно, а значит (в силу непрерывности) множеством значений функции $y = y(x)$ есть сегмент $[0, 2a]$. Таким образом, кривая ограничена (снизу и сверху).

3) *Точки пересечения кривой с осями координат.* Найдём точки пересечения с осью Ox (нули функции):

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow x = 2\pi na,$$

т. е. циклоида пересекает ось абсцисс в точках $(2\pi na, 0)$. Пересечение с осью Oy : $x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, откуда получаем точку $(0, 0)$.

4) *Асимптоты.* В силу ограниченности кривая может иметь только горизонтальную асимптоту, т. е. при $x \rightarrow \pm\infty$, но в этом случае $t \rightarrow \pm\infty$, а $y(t)$ – периодическая функция, не стремящаяся к константе.

5) *Периодичность.* Периодичность циклоиды как функции $y(x)$ (с периодом $2\pi a$) следует из тождеств: $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi a$, $y(t + 2\pi) = y(t)$, верных при всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому достаточно исследовать любой один из одинаковых повторяющихся участков кривой, например, отвечающий значениям параметра $t \in [0, 2\pi]$ (первая арка циклоиды).

6) *Непрерывность, дифференцируемость. Критические точки и локальные экстремумы.* В силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$, кривая непрерывна. Для исследования на дифференцируемость вычислим первую производную:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Стационарные точки: $y'_x = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = \pi n$, т. е. $x = \pi an$, $n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что производная не существует в точках, где $\cos t = 1 \Leftrightarrow t = 2\pi k$, т. е. $x = 2\pi ak$ (концы арок). В этих точках функция непрерывна, производная отрицательна слева и положительна справа от каждой из них. Значит, в этих точках имеются локальные минимумы, равные $y(t)|_{t=2\pi k} = 0$.

При нечётных $n = 2k + 1$ в стационарных точках $x = \pi a(2k + 1)$ производная меняет знак с плюса на минус, а значит, в этих точках имеются локальные максимумы, равные $y(t)|_{t=\pi+2\pi k} = 2a$.

7) *Монотонность.* Оценим знак производной. Поскольку знаменатель дроби положителен во всех случаях, когда не обращается в нуль, то $y' > 0$ при $\sin t > 0$, т. е. функция возрастает на интервалах $t \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$ и убывает на интервалах $t \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. В пересчёте на x это соответствует возрастанию на интервалах $x \in (2\pi ka, a(\pi + 2\pi k))$ и убыванию на интервалах $x \in (a(\pi + 2\pi k), a(2\pi + 2\pi k))$.

8) Исследуем на *выпуклость*. Найдём вторую производную:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

Видно, что при $a > 0$ $y''_{xx} < 0$, если $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. на каждом из интервалов $(2\pi ka, 2\pi a(k+1))$ циклоида выпукла вверх. Точек перегиба нет, так как вторая производная нигде не меняет знака.

Построим первую арку циклоиды, остальные имеют такой же вид. Составим для этого сводную таблицу, включив в неё основные из полученных результатов исследования.

t	$[0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$
x	$[0, \pi a)$	$(\pi a, 2\pi a)$
y	$[0, 2a)$	$(2a, 0)$
y'	$\nearrow$	$\searrow$
y''	$\frown$	$\frown$

Таблица 5: Основные характеристики ветвей циклоиды.

Первому участку кривой отвечает первый столбец. Видно, что когда параметр t меняется от 0 до π , то значение x увеличивается от 0 до πa , а значение y возрастает от 0 до $2a$. То есть эта дуга идёт из начала координат в точку локального максимума $(-3, -2)$, пересекая ось абсцисс в точке $(\pi a, 2a)$. При этом кривая на рассматриваемом участке имеет выпуклость, направленную вверх.

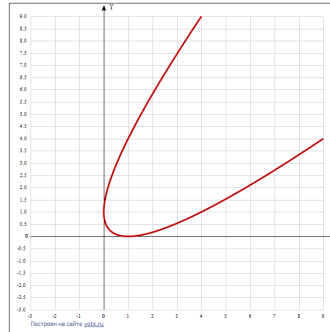
Второму участку кривой соответствует второй из столбцов. Когда t возрастает от π до 2π , то x возрастает от πa до $2\pi a$, а y убывает от $2a$ до 0. То есть эта дуга выходит из точки $(\pi a, 2a)$ и приходит в точку с координатами $(2\pi a, 0)$. Этот участок кривой также имеет выпуклость, направленную вверх.

Объединяя оба участка, симметричных относительно прямой $x = \pi a$, получаем первую арку циклоиды. Продолжая её периодически, получаем всю кривую (Рис. 1).

210. Заметим, что при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, что означает симметрию кривой относительно оси абсцисс. Далее, при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем $x(\pi - t) = -x(t)$, $y(\pi - t) = y(t)$, следовательно, кривая дополнительно симметрична относительно оси ординат. Кривая может быть задана неявным уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$), откуда видна симметрия относительно прямой $y = x$ (Рис. 58).

211. Воспользоваться параметрическими уравнениями кривой (см. предыдущую задачу).

212. При всех t имеем $x \geq 0$, $y \geq 0$, т. е. кривая расположена в 1-й четверти. Найдём 1-ю производную: $y'_t = \frac{t-1}{2}$, $x'_t = \frac{t+1}{2} \Rightarrow y'_x = \frac{t-1}{t+1}$ ($t = \pm 1$ — точки возможного экстремума). Построив кривую знакоопределённости производной, определяем, что $y(x)$ возрастает при $t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и убывает

Рис. 81: Кривая $x = \frac{(t+1)^2}{4}$, $y = \frac{(t-1)^2}{4}$

при $t \in (-1, 1)$, $t = 1$ ($x = 1$) – точка строгого локального минимума, равного 0. Вторая производная: $y''(x) = \frac{4}{(t+1)^3}$, кривая выпукла вверх при $t < -1$ и выпукла вниз при $t > -1$, точек перегиба нет. Кривая не ограничена. Асимптот $y = kx + b$ нет, т. к. при $t \rightarrow \infty$ имеем $k = 1$, $b = \infty$.

Покажем, что кривая симметрична относительно прямой $y = x$. В самом деле, исключая из системы параметрических уравнений t , получим неявное уравнение $(x - y)^2 + 1 = 2(x + y)$, из которого видно, что если некоторая пара (x, y) есть решение уравнения, то пара (y, x) также будет его решением.

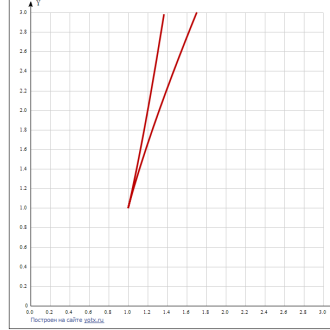
Кривая непрерывна и состоит из трёх участков. Построим сводную табл.6.

t	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
x	$(+\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
y	$(+\infty, 1)$	$(1, 0)$	$(0, +\infty)$
y'	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
y''	$\frown$	$\smile$	$\smile$

Таблица 6: Основные характеристики ветвей.

Найдём, пересекаются ли ветви при $t \rightarrow \pm\infty$. В силу симметрии достаточно приравнять $y = x$ (если точки пересечения у ветвей есть, то они должны лежать на этой прямой), однако равенству $y = x$ отвечает единственное значение параметра $t = 0$ ($x = y = \frac{1}{4}$), Поэтому ветви больше нигде не пересекаются. Эскиз кривой изображён на Рис. 81.

213. Область определения и множество значений найдём позже. Обе функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны, следовательно, кривая непрерывна. Найдём первую

Рис. 82: Кривая $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

производную: $x'_t = 1 - e^{-t}$, $y'_t = 2 - 2e^{-2t}$, тогда $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = 2(1 + e^{-t})$, $t \neq 0$. Так как $y'_x > 0 \forall t \neq 0$, то каждая из ветвей кривой возрастает. Найдём вторую производную: $y''_{xx} = -\frac{2e^{-t}}{1 - e^{-t}}$, она понадобится при исследовании на выпуклость.

Асимптоты возможны при тех значениях параметра, при которых $x \rightarrow \pm\infty$ или $y \rightarrow \pm\infty$, т. е. в данном случае при $t \rightarrow \pm\infty$. Рассмотрим отдельно эти случаи. Пусть $t \rightarrow +\infty$ (т. е. $x \rightarrow +\infty$), ищем асимптоту в виде $y = k_1x + b_1$:

$$k_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} = 2,$$

$$b_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - k_1x(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} ((2t + e^{-2t}) - 2(t + e^{-t})) = 0,$$

т. е. имеется асимптота $y = 2x$. При $t \rightarrow -\infty$ ищем асимптоту $y = k_2x + b_2$:

$$k_2 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} = +\infty,$$

что означает, что второй асимптоты нет.

Кривая состоит из двух ветвей; одна из ветвей – та, что отвечает значениям параметра $t \in (-\infty, 0)$, – выпукла вниз, а другая, соответствующая изменению параметра в пределах $t \in (0, +\infty)$, выпукла вверх. Точек перегиба нет.

Значению $t = 0$ соответствует точка возврата $(1, 1)$. У обеих ветвей, выходящих из этой точки, существует общая касательная, т. к. производная y'_x в этой точке имеет устранимый разрыв. В точке $x = 1$ кривая имеет (строгий) краевой минимум, равный 1. Вся кривая располагается в квадранте $x \geq 1$, $y \geq 1$ (не ограничена сверху и справа). Область определения $D(y) = [1, +\infty)$, множество значений $E(y) = [1, +\infty)$.

Основные из полученных результатов исследования содержатся в таблице 7. Опираясь на эти данные, строим эскиз кривой (Рис. 82). Заметим, что из двух ветвей та, что соответствует значениям $t \in (-\infty, 0)$, лежит выше (производная больше).

t	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
x	$(+\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
y	$(+\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
y'	$\nearrow$	$\nearrow$
y''	$\smile$	$\frown$

Таблица 7: Основные характеристики $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

214. Имеем $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ (кривая лежит в верхней полуплоскости). Асимптоты ищем среди тех t , при которых или $x \rightarrow \infty$, или $y \rightarrow \infty$, т. е. при $t \rightarrow \pm\infty$ или $t \rightarrow \pm 0$. При $t \rightarrow \pm\infty$ имеем $k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\frac{t-1}{t})^2}{t^3 - 3t} = 0$, $b = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - 0 \cdot x(t)) = 1$, т. е. при $t \rightarrow \pm\infty$ есть горизонтальная асимптота $y \equiv 1$. При $t \rightarrow 0-0$ имеем $x \rightarrow 0+0$, $y \rightarrow +\infty$, а при $t \rightarrow 0+0$ имеем $x \rightarrow 0-0$, $y \rightarrow +\infty$, значит $x \equiv 0$ – вертикальная асимптота.

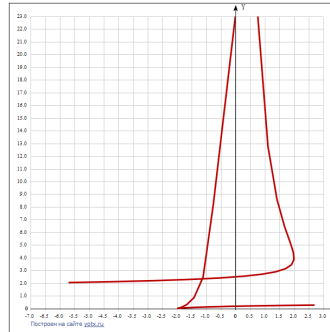
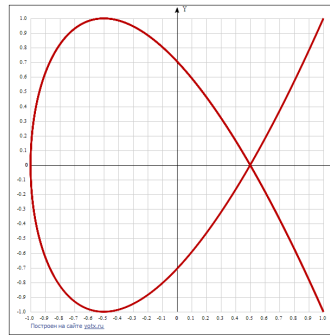
Найдём производные $y'_x = \frac{2(t-1)}{3t(t-1)(t+1)t^3}$ (точке устранимого разрыва $t = 1$ отвечает точка возврата на кривой), $y''_{xx} = -\frac{2(4t+3)}{9t^4(t+1)^3(t-1)}$, критическим точкам 1 и 2 рода отвечают $t = -1, -\frac{3}{4}, 0, 1$. Кривая состоит из пяти ветвей. Построим сводную табл. 8.

t	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{3}{4})$	$(-\frac{3}{4}, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	$(-\infty, 2)$	$(2, \frac{117}{64})$	$(\frac{117}{64}, 0)$	$(0, -2)$	$(-2, +\infty)$
y	$(1+0, 4)$	$(4, \frac{49}{9})$	$(\frac{49}{9}, +\infty)$	$(+\infty, +0)$	$(+0, +\infty)$
y'	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
y''	$\smile$	$\frown$	$\smile$	$\smile$	$\frown$

Таблица 8: Основные характеристики $x = t^3 - 3t$, $y = (\frac{t-1}{t})^2$

Точка $(-2, 0)$ – точка возврата. Точка $(\frac{117}{64}, \frac{49}{9})$ – точка перегиба. В точке $x = -2$ имеем минимум (наименьшее значение функции) $y_{\min} = 0$. Эскиз на Рис. 83.

215. Так как $T_1 = \pi$, $T_2 = \frac{2\pi}{3}$, то кривая периодична с периодом $T = 2\pi$. Исследуя знак первой производной, находим секторы (промежутки) возрастания-убывания. Поскольку $|x| \leq a$, $|y| \leq a$, то кривая ограничена и расположена в соответствующем квадрате.

Рис. 83: Кривая $x = t^3 - 3t$, $y = (\frac{t-1}{t})^2$ Рис. 84: Кривая $x = a \cos 2t$, $y = a \cos 3t$

Построим кривую при $t \in [0, 2\pi]$ (на одном периоде). При $t = 0$ точка $(x(t), y(t))$ находится в верхнем правом углу квадрата. Далее с увеличением t точка, двигаясь влево и вниз, пересекает ось абсцисс в точке $(\frac{1}{2}, 0)$ и, продолжая двигаться влево и вниз (с выпуклостью вниз), достигает при $t = \frac{\pi}{3}$ локального минимума, равного $-a$. Затем текущая точка движется влево и вверх (с тем же направлением выпуклости вниз) и при $t = \frac{\pi}{2}$ второй раз пересекает ось абсцисс в точке $(-a, 0)$. Далее при $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ точка $(x(t), y(t))$ проходит траекторию, симметричную пройденной при $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, и приходит при $t = \pi$ в нижний правый угол квадрата – точку $(a, -a)$. Итак, при изменении t от $t = 0$ до $t = \pi$ точка проходит всю кривую. При дальнейшем увеличении значений параметра от $t = \pi$ до $t = 2\pi$ точка возвращается обратно, двигаясь по той же траектории. (Кривая симметрична относительно оси абсцисс). Кривая изображена на Рис. 84.

216. Возведём уравнения в квадрат и сложим: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

217. Такая окружность может быть задана системой

$$\begin{cases} x = a \cos t + x_0, \\ y = a \sin t + y_0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

218. Функция является периодической с периодом $T = 2\pi$. Найдём область определения: $D(f) : \cos x \geq \frac{1}{2}$, т. е. $x \in [-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Положим $t = \sqrt{2 \cos x - 1}$ ($t \in [0, 1]$), тогда получим функцию

$$h(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 2t + 1} = |t + 1| + |t - 1|.$$

При $t \in [0, 1]$ имеем $f(t) \equiv 2$. График функции $f(x) \equiv 2$, где $x \in [-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$, постройте самостоятельно.

219. 1) При $x = 0$ имеем $y = 0$.

2) При $x > 0$ имеем $\operatorname{th} \lambda x = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}} \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Следовательно, $y = 1 + x$.

3) При $x < 0$ имеем $\operatorname{th} \lambda x = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}} \rightarrow -1$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Следовательно, $y = -1 - x$.

Таким образом, функция может быть записана в виде

$$y = \begin{cases} -x - 1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ x + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

График функции постройте самостоятельно. Итак, функция не имеет локальных экстремумов, а также наименьшего и наибольшего значений; кусочно-непрерывна; в точке $x = 0$ имеет разрыв 1-го рода (скачок); линейно убывает при $x < 0$ и возрастает при $x > 0$; может быть записана также в виде $y = (1 + x) \operatorname{sgn} x$.

220. Из графика видно, что функция при всех $x \in \mathbb{R}$ принимает неотрицательные значения (график лежит в верхней полуплоскости), поэтому убираем все варианты, кроме 5 и 6. Из графика также видно, что в точке $x = -2$ функция не дифференцируема (нет касательной к графику). Найдём производную функции 5, используя определение производной:

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{(x+2)^4 x^2} - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{(x+2)x^2} = 0,$$

т. е. существует производная и равна 0, этот вариант также убираем. Убедимся в том, что оставшийся вариант функции 6 соответствует графику:

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2 x^4} - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{x^4}{x+2}} = \infty,$$

т. е. функция не дифференцируема в точке $x = -2$. Ответ: функция 6.

221. Это задача для самостоятельного решения.

6 СЕМИНАР: Построение кривых в полярных координатах

«Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи».

Дьёрдь По́я (1887–1985), венгерский, швейцарский и американский математик, популяризатор науки. Основные труды – по теории чисел, функциональному анализу, математической статистике и комбинаторике.

С целью защиты авторских прав **НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!**

В полярной системе координат кривые исследуют обычно в тех ситуациях, когда уравнения этих кривых оказываются в этой координатной системе проще, чем в обычной прямоугольной.

6.1 Построение кривых с помощью преобразований параллельного переноса, растяжения и сжатия, поворота, а также центральной и осевой симметрий

Иногда бывает проще построить кривую, отталкиваясь от каких-то известных кривых и применяя преобразования типа параллельного переноса, растяжения и сжатия (к полюсу), поворота, а также центральной и осевой симметрий.¹

Пусть имеется функция $r = r(\varphi)$, где $\varphi \in \Phi$. Рассмотрим функцию

$$r = A \cdot r(B\varphi + C) + D$$

с действительными коэффициентами A, B, C, D . За что отвечает каждый из этих коэффициентов? Коэффициент $A > 0$ отвечает за радиальное (от полюса или к полюсу) растяжение (при $A > 1$) или сжатие (при $0 < A < 1$). Отрицательные значения A возможны в обобщённой полярной системе координат и связаны с гомотетией (центральная симметрия относительно полюса с одновременным растяжением или сжатием). Коэффициент B отвечает за растяжение (сжатие) по переменной φ – так называемое «секторальное» растяжение-сжатие. Если, например, функция $r = r(\varphi)$ периодична с периодом T , то функция $r = A \cdot r(B\varphi + C) + D$ имеет период $\frac{T}{|B|}$. Отрицательные

¹Последний способ, как известно, активно используется и в декартовых системах координат.

значения B влияют в общем случае на монотонность. Перепишем функцию в виде $r = A \cdot r(B(\varphi + \frac{C}{B})) + D$, тогда коэффициент $\frac{C}{B}$ регулирует поворот вокруг полюса по (против) часовой стрелке на соответствующий угол. Наконец, коэффициент D отвечает за радиальное удлинение (укорачивание) радиус-вектора точки кривой на величину D .

Рассмотрим пример.

Пример 108. [8, № 1546] Построить кривую $r = a + b \cos \varphi$ (улитка Паскаля), если:

- 1) $0 < a < b$; 2) $0 < a = b$; 3) $0 < b < a$.

Решение. Происхождение этой кривой можно описать следующим образом. Возьмём окружность диаметра b . Если выбрать полюс O лежащим на самой окружности (в крайней левой точке), а полярную ось провести через центр окружности (горизонтально и направо), то для любой точки M' окружности имеет место соотношение

$$r = b \cos \varphi.$$

Это и есть полярное уравнение такой окружности. Если изменять в этом уравнении угол φ от 0 до 2π , то (в обобщённой полярной системе координат) точка $M'(r, \varphi)$ дважды опишет окружность против часовой стрелки. А если дополнительно удлинить все радиус-векторы OM' точек окружности на постоянный отрезок $M'M = a$, то получится улитка $r = a + b \cos \varphi$.

Данная кривая непрерывна, ограничена ($|r| \leq a + b$), периодична с периодом 2π , замкнута ($r(0) = r(2\pi)$), и симметрична относительно полярной оси (поскольку $r(\varphi) = r(-\varphi)$ при всех φ). Локальный максимум, равный $a + b$, достигается в точках $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Значение минимума зависит от того, в какой системе координат – стандартной ($r \geq 0$) или обобщённой ($r \in \mathbb{R}$) – строится кривая. В первом случае краевой минимум, равный 0, достигается при $\varphi = \pm \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$, во втором случае он равен $a - b$ и достигается при $\varphi = \pi + 2\pi n$.

В зависимости от соотношений между a и b , возможны три случая.

1) При $a < b$ кривая проходит через полюс и, сама себя пересекая, образует внутреннюю петлю (петле соответствуют отрицательные значения r). Для определения углов φ , при которых точка M проходит через полюс, положим $r = 0$ в уравнении кривой: $\cos \varphi = -\frac{a}{b}$, т. е. $\varphi = \pm \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$. Полезно проследить траекторию движения точки при прохождении через последовательные значения $\varphi = 0$ ($r = a + b$), $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($r = a$), $\varphi = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$ ($r = 0$), $\varphi = \pi$ ($r = a - b$), $\varphi = 2\pi - \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$ ($r = 0$), $\varphi = 2\pi$ ($r = a + b$). Кривая изображена на Рис. 85.

2) Если $a = b$, то получаем $r = a(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида), частный случай улитки Паскаля. Полюс лежит на самой кривой (Рис. 86).

3) Если $a > b$, то выражение $a + b \cos \varphi$ положительно при любом φ и кривая окружает полюс со всех сторон (Рис. 87). $\square$

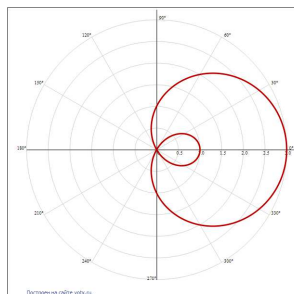


Рис. 85: Улитка Паскаля $r = 1 + 2 \cos \varphi$

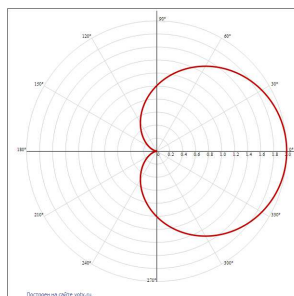


Рис. 86: Кардиоида $r = 1 + \cos \varphi$

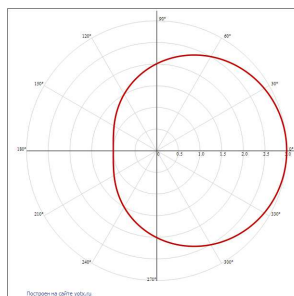
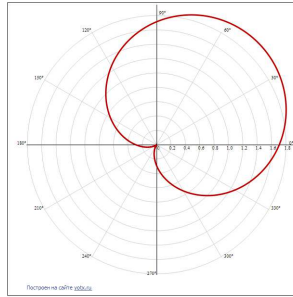
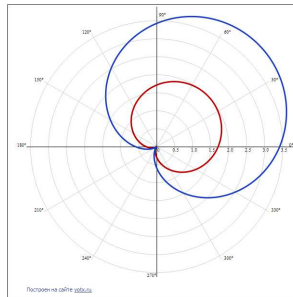


Рис. 87: Улитка Паскаля $r = 2 + \cos \varphi$

Рис. 88: Кардиоиды $r = 1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ Рис. 89: Кардиоиды $r = 2\left(1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

Пример 109. Пусть дана кардиоиды $r = 1 + \cos \varphi$. Построить кривую

$$r = 1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Решение. В данном случае просто поворачиваем исходную кардиоиду (Рис. 86) вокруг полюса в положительном направлении (против часовой стрелки) на угол $\frac{\pi}{4}$. Результат изображён на Рис. 88. $\square$

Пример 110. Пусть теперь дана кардиоиды $r = 1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$. Построить кривую

$$r = 2\left(1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Решение. Для получения искомой кривой используем преобразование растяжения кардиоиды на Рис. 88 в 2 раза (от полюса). Обе кривые – исходная (внутри) и «растянутая» (снаружи) – изображены на Рис. 89. $\square$

6.2 Построение кривых с помощью общей схемы исследования – с использованием производных

«В науке нужны не только отчёты об освоении средств и созданных лабораториях, но и конкретные результаты – современное оборудование, компоненты, продукты и конкурентные сервисы. Нужны практические конечные результаты, которые ждут страна, экономика и граждане».

В.В. Путин, президент РФ, 8 февраля 2023 г., на заседании Совета по науке и образованию.

В общем случае, когда необходимо построить неизвестную (сложную) кривую, исследование проводится всё по той же общей схеме с использованием производной, которая была рассмотрена выше, но с учётом особенностей полярной системы координат.

Пример 111. [8, № 1548] Исследовать и построить кривую

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos(3\varphi)}} \quad (a > 0).$$

Решение. Воспользуемся общей схемой.

1) *Область определения. Периодичность.* Функция $r(\varphi)$ определена при $\cos 3\varphi > 0$, т. е. $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} < \varphi < \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом функция периодична с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$, поэтому на промежутке $\varphi \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ поместится три периода. Далее исследуем и строим кривую вначале на одном периоде (от $-\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{6}$). Здесь функция определена при $\varphi \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$.

2) *Множество значений.* Функция $r(\varphi)$ принимает наименьшее значение, равное a , когда $\cos 3\varphi = 1$. При всех остальных допустимых значениях φ она принимает значения, большие a , причём при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{6} - 0$ имеем $r(\varphi) \rightarrow +\infty$. Таким образом, множество значений функции $E(r) = [a, +\infty)$, кривая не ограничена.

3) *Асимптоты.* На границах области определения кривая имеет асимптоты (аналоги вертикальных асимптот). В самом деле, $r \rightarrow +\infty$, если $\cos(3\varphi) \rightarrow +0$, т. е. при $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{6} + 0$ и при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{6} - 0$. Таким образом, на рассматриваемом участке имеются две асимптоты: лучи $\varphi = \pm \frac{\pi}{6}$.

4) *Симметрия.* Поскольку функция чётная ($r(-\varphi) = r(\varphi)$), кривая симметрична относительно полярной оси, пересекая её в точке $(\varphi, r) = (0, a)$. Кроме того, каждая из трёх ветвей кривой имеет свою ось симметрии. На участке от $-\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{6}$ кривая имеет ось симметрии в виде луча $\varphi = 0$.

5) *Дифференцируемость. Монотонность.* Функция $r(\varphi)$ дифференцируема всюду, где определена. Найдём первую производную: $r'_\varphi = \frac{3a \sin 3\varphi}{2\sqrt{\cos^3 3\varphi}}$. При $\varphi \in (-\frac{\pi}{6}, 0)$ производная отрицательна (функция $r(\varphi)$ убывает); при $\varphi = 0$ производная обращается в нуль (стационарная точка); при $\varphi \in (0, \frac{\pi}{6})$ производная положительна (функция возрастает).

6) *Локальные экстремумы.* В точке $\varphi = 0$ функция имеет строгий локальный минимум, равный a . Других экстремумов нет.

7) Исследование на *выпуклость* опустим, т. к. в полярных координатах анализ знака второй производной не даёт такого наглядного эффекта, как в прямоугольных координатах. (Например, у постоянной функции $r \equiv 2$ вторая производная равна нулю, но зрительно дуга окружности выглядит выпуклой вверх (от полюса)).

Составим сводную таблицу полученных результатов исследования.¹

φ	$(-\frac{\pi}{6}, 0)$	$(0, \frac{\pi}{6})$
r	$(+\infty, a)$	$(a, +\infty)$
r'	$\searrow$	$\nearrow$

Таблица 9: Характеристики кривой $r = \frac{a}{\sqrt{\cos(3\varphi)}}$ ($a > 0$).

Первой ветви отвечает первый столбец. Видно, что когда угол φ возрастает от $-\frac{\pi}{6}$ до 0, то значение r уменьшается от $+\infty$ до a , т. е. кривая от асимптоты $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, приближаясь к полюсу, приходит в точку минимума с координатами $(0, a)$, лежащую на полярной оси.

Продолжение кривой описывается вторым из столбцов таблицы. Видно, что когда угол φ продолжает возрастать (от 0 до $\frac{\pi}{6}$), то r также растёт от a до $+\infty$, кривая стремится к асимптоте $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Обе ветви симметричны друг другу относительно полярной оси.

Итак, на половине периода (от $-\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{6}$) кривая существует, а на второй половине (от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$) функция r не определена. Полная кривая (от $-\frac{\pi}{6}$ до $\frac{11\pi}{6}$) состоит из трёх одинаковых кривых (по одной на каждом периоде). Кривая построена (Рис. 90). $\square$

¹В таблице интервалы присутствуют только в первой строке (для φ), во второй строке (для r) указаны не промежутки, а соответствующие диапазоны изменения этой переменной.

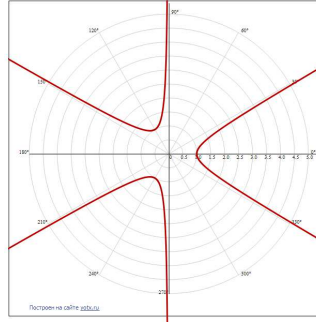


Рис. 90: Кривая $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$

6.3 Задачи для самостоятельного решения

Исследовать кривую и построить её график ($a > 0$, $r \geq 0$):

№222. $r = \frac{1}{\varphi}$ (гиперболическая спираль);

№223. [8, № 1547] $r = a \sin 3\varphi$ (трилистник);

№224. $r = \sqrt{a \cos 2\varphi}$ ($a > 0$, лемниската Бернулли).

№225. $r = 2 + \sin 3\varphi$.

№226. Полярный «аналог» функции Дирихле:

$$r = \begin{cases} 1, & \varphi - \text{рационально,} \\ 0, & \varphi - \text{иррационально.} \end{cases}$$

№227. $r = \arcsin(\sin \varphi)$;

№228. $r = \operatorname{arctg} \varphi$;

№229. $r = \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi$;

№230. $r^2 \sin 2\varphi = 2$;

№231. $r = \cos t$, $\varphi = \sin t$, где $t \in \mathbb{R}$;

№232. $r = \frac{\sqrt{3}}{\cos(\varphi + \frac{\pi}{3})}$. Указание: перейти к декартовым координатам.

№233. $r = \frac{16}{5 + 3 \cos \varphi}$. Указание: перейти к декартовым координатам.

№234. $r = \frac{9}{4 + 5 \sin \varphi}$. Указание: перейти к декартовым координатам.

№235. Построить кривую, заданную неявным уравнением

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2.$$

Указание: перейти к полярным координатам.

№236. $r = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$. Как выглядит данная кривая в обобщённой полярной системе координат ($r \in \mathbb{R}$)?

№237. $r = \sin 2\varphi$ (*двулистник*). Как выглядит данная кривая в обобщённой полярной системе координат ($r \in \mathbb{R}$)?

№238. $r = a \cos 4\varphi$ (*четырёхлистник*). Сколько лепестков имеют кривые $r = a \cos(20\varphi)$, $r = a \cos(\sqrt{2}\varphi)$?

№239. $r = \cos \varphi - \sin \varphi$, где $\varphi \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$;

№240. $r = 2 \cos \varphi - 6 \sin \varphi$.

№241. Алгебраическая кривая 3-го порядка $y^2(a-x) = x^2(a+x)$ называется *строфбодой*. Найти её явные уравнения, параметрические уравнения, а также полярное уравнение, исследовать и построить кривую.

6.4 Ответы и решения

222. Область определения: $\varphi > 0$. Функция непрерывна и дифференцируема. Найдём первую производную: $r' = -\frac{1}{\varphi^2} < 0$, следовательно, функция убывает при $\varphi > 0$. При $\varphi \rightarrow +\infty$ имеем $r \rightarrow +0$ (т. е. в полюсе кривая имеет асимптотическую особую точку). Когда же $\varphi \rightarrow +0$, то $r \rightarrow +\infty$ (т. е. по мере приближения к полярной оси график удаляется к бесконечности). Кривая изображена на Рис. 14.

223. Кривая относится к семейству «роз», это так называемая трёхлепестковая роза.¹ Для её исследования и построения воспользуемся общей схемой.

1) *Область определения. Периодичность.* Функция $r(\varphi)$ определена при $a \sin 3\varphi \geq 0$, т. е. $\frac{2\pi n}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом функция периодична с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$, поэтому в секторе $\varphi \in [0, \frac{2\pi}{3})$ поместится ровно один период, в пределах которого функция определена при $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$ и не определена при $\varphi \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$.

2) *Ограниченность. Непрерывность. Множество значений. Наибольшее и наименьшее значения.* Кривая расположена внутри круга радиуса a с центром в полюсе (ограничена). При этом функция $r(\varphi)$ принимает наибольшее значение, равное a , когда $\sin 3\varphi = 1$ (в частности, при $\varphi = \frac{\pi}{6}$) и принимает наименьшее значение, равное нулю, при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (точные грани достигаются). В силу непрерывности она принимает все значения из отрезка $[0, a]$, который образует множество значений этой функции.

3) *Симметрия.* Каждый из «лепестков» кривой имеет свою ось симметрии. Так, в секторе $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ осью симметрии служит луч $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ($r(\frac{\pi}{3} - \varphi) = r(\varphi)$ при $\varphi \in (0, \frac{\pi}{6})$).

4) *Асимптоты.* Кривая не имеет асимптот.

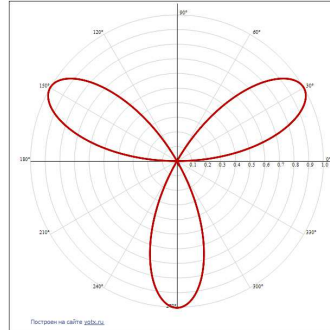
5) *Дифференцируемость. Монотонность.* Функция $r(\varphi)$ дифференцируема всюду, где определена. Это гладкая кривая (т. к. дифференцируема бесконечное число раз). Найдём первую производную:

$$r'_\varphi = 3a \cos 3\varphi.$$

В частности, при $\varphi \in (0, \frac{\pi}{6})$ производная положительна (функция $r(\varphi)$ возрастает), при $\varphi = \frac{\pi}{6}$ производная обращается в нуль (стационарная точка); при $\varphi \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ производная отрицательна (функция убывает).

6) *Локальные экстремумы.* В точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$ функция имеет строгий краевой минимум, равный 0, а в точке $\varphi = \frac{\pi}{6}$ имеет локальный максимум, равный a .

¹Розами называются семейство кривых, задаваемых уравнениями $r = a \sin b\varphi$ или $r = a \cos b\varphi$ ($a, b > 0$). Если b – целое число, то при чётном b роза состоит из $2b$ «лепестков», а при нечётном b роза содержит b «лепестков».

Рис. 91: Трилистник (трёхлепестковая роза) $r = a \sin 3\varphi$

7) *Замкнутость.* Участок кривой на сегменте $[0, \frac{\pi}{3}]$ образует замкнутую «петлю», т. к. $r(0) = r(\frac{\pi}{3})$.

Составим сводную таблицу полученных результатов исследования.¹

φ	$(0, \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$
r	$(0, a)$	$(a, 0)$
r'	$\nearrow$	$\searrow$

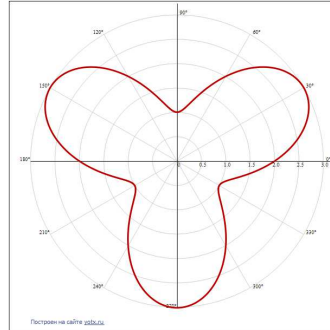
Таблица 10: Характеристики кривой $r = a \sin 3\varphi$ ($a > 0$).

Первой ветви отвечает первый столбец. Видно, что когда угол φ возрастает от 0 до $\frac{\pi}{6}$, то значение r возрастает от 0 до a , при этом кривая приходит в точку локального максимума. Продолжение кривой описывается вторым из столбцов таблицы. Когда угол φ продолжает возрастать (от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$), то r убывает от a до 0. На второй половине своего периода (от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{2\pi}{3}$) функция r не определена.

Полная кривая состоит из трёх одинаковых «лепестков» (по одному на каждом периоде). Кривая построена (Рис. 91).

224. Кривая периодична с периодом $T = \pi$, поэтому достаточно построить её на любом периоде, например, на промежутке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Решая неравенство $\cos 2\varphi \geq 0$, находим, что на рассматриваемом промежутке кривая определена при $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Кривая непрерывна и (в силу $r \leq \sqrt{a}$) ограничена, причём $E(r) = [0, \sqrt{a}]$. Поскольку $r(-\varphi) = r(\varphi)$, то кривая симметрична относительно полярной оси. Найдём производную и стационарные точки: $r'(\varphi) = -\frac{\sqrt{a} \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$ (при $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$). Кривая возрастает при

¹В таблице интервалы присутствуют только в первой строке (для φ), во второй строке (для r) указаны не промежутки, а соответствующие диапазоны изменения этой переменной.

Рис. 92: Кривая $r = 2 + \sin 3\varphi$

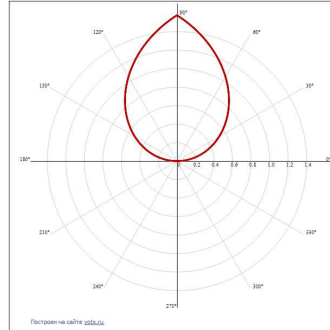
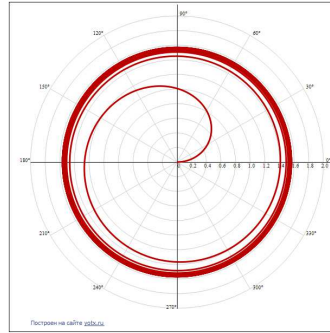
$[-\frac{\pi}{4}, 0]$ и убывает при $[0, \frac{\pi}{4}]$, имея в точке $\varphi = 0$ локальный максимум (наибольшее значение), равный $\sqrt{a}$. При этом $r(-\frac{\pi}{4}) = r(\frac{\pi}{4}) = 0$, т. е. на сегменте $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ кривая образует замкнутую «петлю». Вся кривая представляет собой объединение двух «петель», напоминая отчасти знак бесконечности « ∞ ». Кривая изображена на Рис. 8.

225. Поскольку $r(\varphi) > 0$ при всех $\varphi \in \mathbb{R}$, то $D(r) = \mathbb{R}$. Так как $r \leq 3$, то кривая ограничена, причём $E(r) = [1, 3]$. Кривая периодична с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$, поэтому достаточно построить её на любом периоде, например, при $\varphi \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. Стационарные точки: $r' = 3 \cos 3\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$. Функция $r(\varphi)$ возрастает при $\varphi \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, убывает при $\varphi \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, имеет локальный минимум при $\varphi = -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$, равный 1, и имеет локальный максимум при $\varphi = \frac{\pi}{6}$, равный 3. Ось симметрии $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Кривая замкнута ($r(-\frac{\pi}{6}) = r(\frac{\pi}{2})$), состоит из трёх одинаковых участков, непрерывным образом переходящих один в другой. Полная кривая изображена на Рис. 92.

226. Как и обычная функция Дирихле, данная кривая разрывна в любой точке (разрывы 2-го рода, т. е. предел не существует), ограничена (помещается в круге радиуса 1 с центром в полюсе). Наибольшее значение равно 1 (достигается в рациональных точках), наименьшее равно 0 (достигается при иррациональных φ). Кривая периодична (периодом является любое рациональное число), немонотонна, симметрична относительно полярной оси ($r(-\varphi) = r(\varphi)$).

227. Кривая периодична с периодом $T = 2\pi$. Рассмотрим промежуток $\varphi \in [0, 2\pi)$. Так как $r \geq 0$, то функция $r(\varphi)$ определена при $\sin \varphi \geq 0$, т. е. $\varphi \in [0, \pi]$. В том числе, при $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ имеем $r = \varphi$ (дуга спирали Архимеда), а при $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ имеем $r = \pi - \varphi$ (симметрия упомянутой выше дуги относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{2}$). Объединяя обе дуги, получаем кривую (Рис. 93).

228. Область определения: $r \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \geq 0$. Область значений: $r \in [0, \frac{\pi}{2})$. Кривая ограничена ($r < \frac{\pi}{2}$), непериодична, непрерывна и дифференцируема. Стационарные точки отсутствуют: $r' = \frac{1}{1+\varphi^2} > 0 \Rightarrow$ функция всюду возрастает,

Рис. 93: Кривая $r = \arcsin(\sin \varphi)$ Рис. 94: Кривая $r = \arctg \varphi$

экстремумов нет. Имеется круговая асимптота $r = \frac{\pi}{2}$. Точная верхняя грань равна $\frac{\pi}{2}$, не достигается, наименьшее значение $r(0) = 0$. Кривая имеет вид спирали, выходящей из полюса и раскручивающейся против часовой стрелки. Кривая изображена на Рис. 94.

229. Это окружность единичного радиуса с центром в полюсе и выколотыми точками вида $\varphi = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

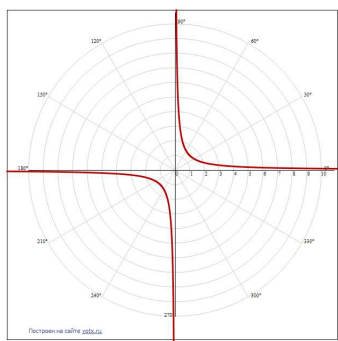
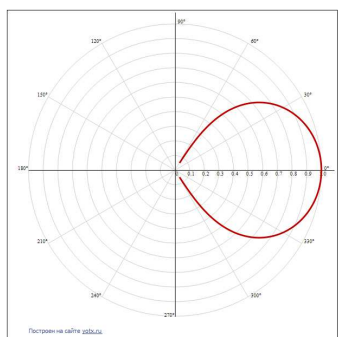
230. Преобразуем уравнение ($\sin 2\varphi > 0$):

$$r^2 \sin \varphi \cos \varphi = 1 \Leftrightarrow r \sin \varphi = \frac{1}{r \cos \varphi} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}.$$

Кривая изображена на Рис. 95.

231. Возводя в квадрат и складывая, получим $r^2 + \varphi^2 = 1$, откуда область определения $\varphi \in [-1, 1]$. Кривая изображена на Рис. 96.

232. Преобразуем уравнение, переходя из полярной в декартову систему координат: $\sqrt{3} = r \left(\frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$, откуда находим $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 2$ — это уравнение прямой.

Рис. 95: Кривая $r^2 \sin 2\varphi = 2$ Рис. 96: Кривая $r = \cos t, \varphi = \sin t$

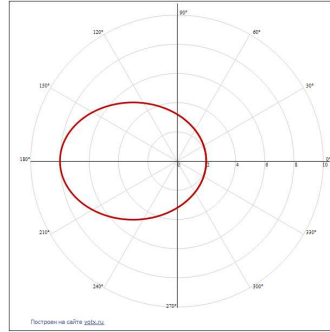


Рис. 97: Эллипс $r = \frac{16}{5 + 3 \cos \varphi}$

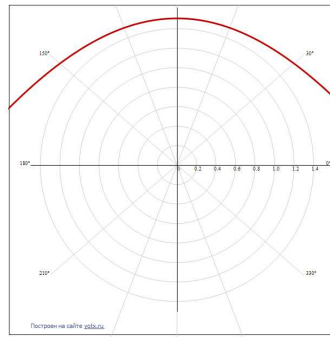


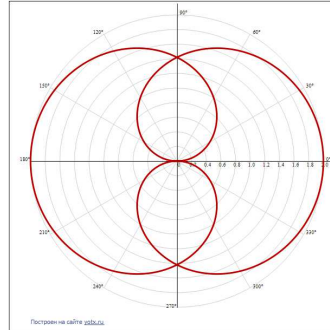
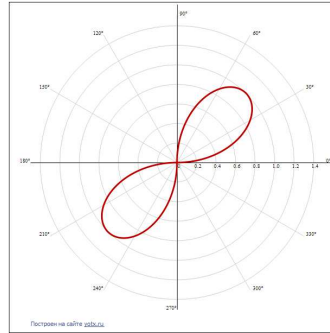
Рис. 98: Ветвь гиперболы $r = \frac{9}{4 + 5 \sin \varphi}$

233. Кривая (эллипс $(\frac{x+3}{5})^2 + (\frac{y}{4})^2 = 1$ с фокусом в полюсе) на Рис. 97.

234. Кривая (нижняя ветвь гиперболы $(\frac{y-5}{2})^2 - (\frac{x}{3})^2 = 1$ с фокусом в полюсе, параметризация $x = 2 \operatorname{sh} t$, $y = 5 - 2 \operatorname{ch} t$) изображена на Рис. 98.

235. В данном случае уравнение кривой выглядит проще в полярных координатах. Переходя к полярным координатам, получим при $r \neq 0$: $(r^2 - r \cos \varphi)^2 = r^2 \Leftrightarrow r = 1 + \cos \varphi$. Это кардиоида (Рис. 86).

236. Область определения: $r \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in [4\pi n, 2\pi + 4\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$. В силу периодичности с периодом $T = 4\pi$ достаточно построить кривую при $\varphi \in [0, 2\pi]$. Стационарные точки: $r' = \cos \frac{\varphi}{2} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pi$. Кривая выходит из полюса ($r = 0$), возрастает при $\varphi \in [0, \pi]$, имеет локальный максимум при $\varphi = \pi$ (равный 2) и убывает при $\varphi \in [\pi, 2\pi]$, возвращаясь к локальному минимуму ($r = 0$) при $\varphi = 2\pi$. Кривая симметрична относительно полярной оси. В обобщённой полярной системе координат кривая имеет симметричное продолжение относительно оси ординат.

Рис. 99: Кривая $r = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$ Рис. 100: Кривая $r = \sin 2\varphi$

На Рис. 99 изображена кривая в обобщённых полярных координатах. В обычных полярных координатах остаётся только «левое яблоко».

237. 1) Область определения функции: $r \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in [\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n], n \in \mathbb{Z}$. Область значений: $r \in [0, 1]$ (кривая ограничена).

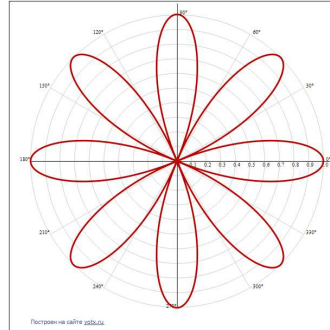
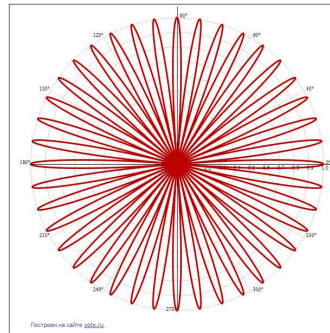
2) Периодичность. Функция периодична с $T = \pi$, поэтому достаточно исследовать кривую на $[0, \pi]$. Пересекая данный отрезок с областью определения функции, получаем, что функция определена лишь в секторе $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

3) Кривая непрерывна, дифференцируема. Стационарные точки: $r'_\varphi = 2 \cos 2\varphi$, стационарные точки $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. Отрезку $[0, \frac{\pi}{2}]$ принадлежит лишь одна точка $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

4) Локальные экстремумы: поскольку в этой точке r' меняет знак с плюса на минус, то это точка локального максимума $r_{\max} = 1$.

В точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ достигается наименьшее значение $r_{\min} = 0$.

5) Луч $\varphi = \frac{\pi}{4}$ – ось симметрии. Кривая состоит из 2-х лепестков и изображена на Рис. 100. В обобщённой полярной системе координат кривая состоит

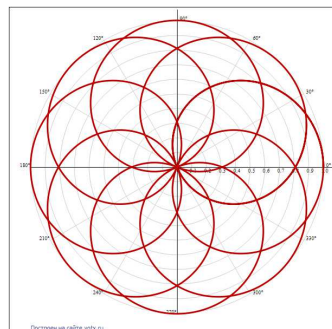
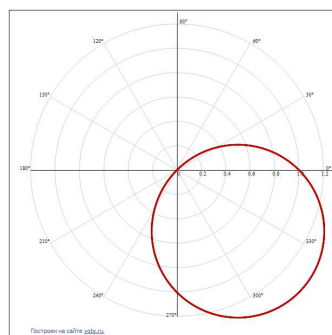
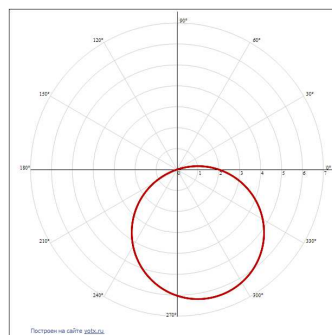
Рис. 101: Кривая $r = \cos 4\varphi$ Рис. 102: Кривая $r = \cos 20\varphi$

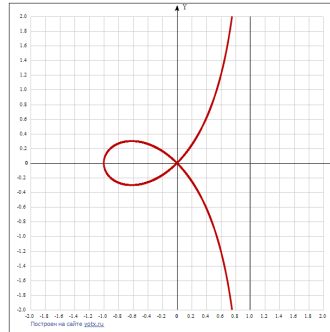
из 4-х лепестков (объясните, как проходится кривая при непрерывном изменении φ от 0 до 2π).

238. Семейство «роз Гранди» описывается уравнением в полярных координатах $r = a \sin(b\varphi)$ ($r = a \cos(b\varphi)$), где a и b – некоторые постоянные. При b нечётном роза состоит из b лепестков, при b чётном – из $2b$ лепестков; при b рациональном лепестки частично перекрывают друг друга. При иррациональном b роза имеет бесконечное число лепестков. В уравнении $r = a \sin(b\varphi)$ значение a отвечает за длину лепестков, а значения b – за их количество и форму. Кривые изображены на Рис. 101 и Рис. 102. На Рис. 103 можно увидеть кривую $r = \cos(\frac{4}{5}\varphi)$.

239. Преобразуем уравнение $r = \cos \varphi - \sin \varphi = \sqrt{2} \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})$. Здесь представлены два преобразования: растяжение в $\sqrt{2}$ раз (от полюса), а также поворот по часовой стрелке на $\frac{\pi}{4}$. Кривая (окружность) изображена на Рис. 104.

240. Кривая (окружность) изображена на Рис. 105.

Рис. 103: Кривая $r = \cos(\frac{4}{5}\varphi)$ Рис. 104: Кривая $r = \cos \varphi - \sin \varphi$ Рис. 105: Кривая $r = 2 \cos \varphi - 6 \sin \varphi$

Рис. 106: Строфоида $y^2(a - x) = x^2(a + x)$

241. 1) Явные уравнения строфоиды: $y = \pm x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, $-a \leq x < a$.

2) Параметрических уравнения. Перепишем уравнение в виде $\frac{y^2}{x^2} = \frac{a+x}{a-x}$ и положим $y = tx$: $t^2 = \frac{a+x}{a-x}$, откуда $x = a \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, тогда $y = at \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$.

3) Полярное уравнение: $y^2(a - x) = x^2(a + x) \Leftrightarrow (r \sin \varphi)^2(a - r \cos \varphi) = (r \cos \varphi)^2(a + r \cos \varphi) \Leftrightarrow r^3 \cos \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + ar^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0 \Leftrightarrow r^3 \cos \varphi + ar^2 \cos 2\varphi = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$.

В результате исследования получаем кривую (Рис. 106). Строфоида непрерывна, не ограничена снизу и сверху, имеет в точке $(0, 0)$ двойной узел (точка самопересечения, кривая делает петлю), вертикальная асимптота $x = 1$, симметрична относительно $y = 0$.

7 СЕМИНАР: Определённый интеграл Римана как предел интегральных сумм

«Программисты — не математики, как бы нам этого ни хотелось».

Richard P. Gabriel (род. в 1949 году) — американский ученый-компьютерщик, известный своими работами в области вычислительной техники, связанными с языком программирования Lisp, и особенно Common Lisp.

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Интеграл — одно из важнейших понятий математического анализа, определением и исследованием которого занимается интегральное исчисление. И если неопределённый интеграл порождён задачей восстановления функции по её производной, то определённый интеграл возникает при решении многих прикладных задач, в частности, о нахождении площади плоской фигуры, ограниченной кривой, о вычислении пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела или площади его поверхности и т. п., и определяется иначе.

Займёмся понятием определённого интеграла, его разновидностями, свойствами и методами вычисления, классами интегрируемых функций, а также выясним его связь с неопределённым интегралом. В зависимости от размерности пространства, в котором задана подынтегральная функция, и вида области интегрирования определённый интеграл может быть одинарным или кратным, криволинейным, поверхностным и т. д. Также существуют разные подходы к определению интеграла: различают интегралы Римана, Лебёга, Стильбеса и некоторые другие.

В разделе начального анализа мы рассмотрим простейшие виды определённых интегралов от функций одной действительной переменной — собственные и несобственные интегралы, изучим их свойства и способы вычисления, а также обратимся к основным приложениям. Для более подробного ознакомления с темой см., например, [26]. Другие виды интегралов будут изучаться в курсе математического анализа позже.

7.1 Определение интеграла Римана (собственного интеграла). Геометрический смысл

Собственный интеграл как предел интегральных сумм. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$.

Говорят, что задано *разбиение* сегмента $[a, b]$, если заданы точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ такие, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Зафиксируем некоторое разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a, b]$. Обозначим длину i -го сегмента разбиения $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n-1}$, а величину $\Delta_T = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$ (наибольшую из длин частичных отрезков разбиения) назовём *диаметром* разбиения T . Выберем на каждом из таких сегментов $[x_i, x_{i+1}]$ произвольным образом точку ξ_i . Назовём совокупность точек $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n\}$ (объединение точек разбиения и промежуточных точек) *размеченным* разбиением сегмента $[a, b]$, а неразмеченное разбиение T , соответствующее разбиению V , будем обозначать $T(V)$.

$$\text{Сумма } \sigma(V) = \sigma(T, \xi) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется *интегральной суммой* (Римана) функции $f(x)$, соответствующей размеченному разбиению V сегмента $[a, b]$.¹

Опр. 1 (*определённого интеграла Римана*). Перейдём в интегральной сумме $\sigma(T, \xi)$ к пределу I , устремив диаметр разбиения к нулю

$$I = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Если этот предел I существует, конечен и не зависит ни от разбиения T , ни от выбора промежуточных точек $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, то он называется *определённым интегралом Римана* от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* (в собственном смысле) на сегменте $[a, b]$, числа a и b , соответственно, нижним и верхним *пределами интегрирования*. Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*, $[a, b]$ – *сегментом (промежутком) интегрирования*. Для интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$ функций ниже будем использовать обозначение $f(x) \in R[a, b]$.

¹Бернард Риман (1826–1866) – выдающийся немецкий математик, механик и физик.

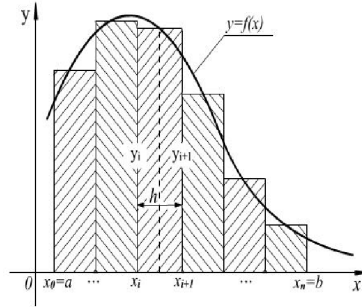


Рис. 107: Интегральная сумма и её геометрический смысл.

Если функция $f(x)$ определена в точке a , то по определению будем полагать

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Если $a < b$ и $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, то по определению будем считать, что

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

Замечание 1. Раскрывая понятие предела, получим, что действительное число I называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для произвольного размеченного разбиения V сегмента $[a, b]$ с диаметром $\Delta_T < \delta$ выполнено:

$$|I - \sigma(V)| < \varepsilon.$$

Замечание 2. Если $f(x) \geq 0$, то у интегральной суммы $\sigma(V)$ имеется очевидный геометрический смысл, а именно, риманова сумма представляет собой сумму площадей прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$, $i = \overline{0, n-1}$, т. е. площадь ступенчатой фигуры, образованной этими прямоугольниками, и приближает площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – отрезком $[a, b]$ оси Ox , слева и справа – вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$. Отсюда в пределе получаем *геометрическую интерпретацию* определённого интеграла: когда функция $f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади указанной выше криволинейной трапеции (Рис. 107).

Теорема (единственность интеграла Римана). Если существуют два числа I_1 и I_2 , удовлетворяющие данному выше определению интеграла, то

$$I_1 = I_2.$$

Отметим принципиальное отличие понятий определённого и неопределённого интегралов: если неопределённый интеграл $\int f(x)dx$ есть семейство первообразных функций, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ – это действительное число, одна из характеристик функции.

7.2 Нижняя и верхняя суммы Дарбу. Интегралы Дарбу. Необходимое и достаточное условие интегрируемости

*«Приспосаблийся к обстоятельствам, выпавшим на твою долю.
И от всего сердца люби людей, с которыми тебе суждено жить».*

*Марк Аврелий (121–180) – древнеримский император,
философ.*

В качестве вспомогательного средства исследования наряду с интегральными суммами рассмотрим, по примеру Дарбу,¹ ещё другие, сходные с ними, но более простые суммы. Обозначим точные грани на i -м сегменте разбиения

$$m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x), \quad M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x).$$

Нижней и верхней интегральными суммами Дарбу функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ при фиксированном разбиении T этого сегмента называются, соответственно, суммы

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot \Delta x_i, \quad \bar{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot \Delta x_i.$$

Нижним и верхним интегралами Дарбу называют, соответственно,

$$\underline{I} = \sup_T \underline{S}_n, \quad \bar{I} = \inf_T \bar{S}_n.$$

Лемма (Дарбу): $\underline{I} = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \underline{S}_n, \quad \bar{I} = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \bar{S}_n.$

Теорема (необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману). Для существования определённого интеграла Римана функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \underline{S}_n = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \bar{S}_n \quad (\Leftrightarrow \quad \underline{I} = \bar{I}).$$

Условие интегрируемости можно сформулировать в эквивалентном виде.

¹ *Жан Гастон Дарбу* (1842–1917) — французский математик, известен благодаря своим результатам в математическом анализе (теория интегрирования, дифференциальные уравнения в частных производных) и дифференциальной геометрии.

Теорема* (*необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману*). Функция $f(x)$ интегрируема (в собственном смысле) на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot \Delta x_i = 0,$$

где через ω_i обозначено *колебание функции* $f(x)$ на i -м сегменте разбиения:

$$\omega_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) - \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) = M_i - m_i.$$

7.3 Необходимое условие интегрируемости. Классы и свойства интегрируемых функций. Критерий Лебега интегрируемости

В связи с интегралом Римана приведём необходимые теоретические сведения.

1. (*Ограниченность как необходимое условие интегрируемости*). Если функция интегрируема по Риману на сегменте, то она ограничена на нём.

Следствие. Неограниченная на сегменте функция не интегрируема по Риману на этом сегменте.

Пример 112. Существуют ограниченные функции, не интегрируемые по Риману, например, функция Дирихле. $\square$

Следующие три пункта отражают достаточные условия интегрируемости, выделяя соответствующие классы интегрируемых функций.

2. (*Интегрируемость непрерывной функции*). Если функция $f(x) \in C[a, b]$, то она интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Пример 113. Интегрируема ли по Риману «канторова лестница»? Можно ли вычислить интеграл от неё?

Решение. Канторова лестница является примером непрерывной функции $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, поэтому она интегрируема по Риману, и интеграл от неё численно равен площади под графиком функции. Легко видеть, что график симметричен относительно центра единичного квадрата, поэтому он разбивает квадрат на две части равной площади. Следовательно, значение интеграла равно $1/2$. $\square$

3. (*Интегрируемость монотонной функции*). Монотонная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на этом сегменте.

Пример 114. Канторова лестница монотонна на сегменте $[0, 1]$, поэтому она интегрируема по Риману на этом сегменте. $\square$

4. (Об интегрируемости композиции интегрируемой функции и липшицевой функции)¹. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, а функция $\varphi \in \text{Lip}[m, M]$. Тогда функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на сегменте $[a, b]$.²

Справедливо и более общее утверждение об интегрируемости сложной функции.

4'. (Об интегрируемости композиции интегрируемой функции и непрерывной функции). Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, а функция $\varphi(y)$ определена и непрерывна на сегменте $[m, M]$. Тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$.

В частности, если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то её абсолютная величина $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$. Обратное, вообще говоря, неверно: из интегрируемости по Риману функции $|f(x)|$ не следует интегрируемости $f(x)$.

Пример 115. Функция (типа Дирихле)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рационально,} \\ -1, & x - \text{иррационально,} \end{cases}$$

очевидно, не интегрируема в собственном смысле на сегменте $[0, 1]$, однако её модуль является постоянной функцией и уже интегрируем на данном сегменте. $\square$

Другой пример: если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то для любого числа $\alpha > 0$ функция $|f(x)|^\alpha$ будет интегрируема на $[a, b]$.

Непрерывность функции не является необходимым условием её интегрируемости. Как влияет на интегрируемость наличие у функции точек разрыва (любого рода)? Ответ на этот вопрос содержится в двух следующих пунктах.

5. (Об интегрируемости ограниченной функции, множество точек разрыва которой имеет меру нуль по Жордану). Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$. Если множество точек разрыва этой функции имеет жорданову меру нуль,¹ то функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Следствие 1. Ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$, имеющая лишь конечное число точек разрыва, интегрируема на этом сегменте. В частности,

¹Говорят, что функция f удовлетворяет на сегменте $[a, b]$ условию Липшица, если $\exists C > 0 : \forall x, y \in [a, b]$ выполнено $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$. Обозначение: $f \in \text{Lip}[a, b]$.

²Заметим, что если функция f удовлетворяет на сегменте $[a, b]$ условию Липшица, то она непрерывна на этом сегменте.

¹Множество точек числовой прямой имеет меру нуль по Жордану, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная система покрывающих это множество интервалов, сумма длин которых меньше ε . Точка x покрыта интервалом, если она содержится в данном интервале.

кусочно-непрерывная² на сегменте $[a, b]$ функция интегрируема на нём.

Следствие 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ отличаются друг от друга только в конечном числе точек, то они одновременно интегрируемы или нет в смысле Римана на $[a, b]$, и если интегрируемы, то их интегралы равны:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

В частности, интегралы по сегменту $[a, b]$ и интервалу (a, b) совпадают, по этой же причине устранимые разрывы интеграл Римана «не замечает».

Пример 116. Существует ли собственный интеграл $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x} dx$?

Решение. Подынтегральная функция при любом доопределении в нуле будет либо непрерывна на сегменте $[-1, 1]$, либо иметь одну точку (устранимого) разрыва, при этом она ограничена. Согласно следствию 1, интеграл существует. $\square$

Сформулируем, наконец, необходимое и достаточное условие интегрируемости функции по Риману.

6. (Критерий Лебега интегрируемости функции). Определённая и ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва имеет меру нуль по Лебегу.¹

Пример 117. Доказать, что любое счётное множество действительных чисел имеет меру нуль по Лебегу.

Доказательство. В самом деле, пусть имеется счётное числовое множество E : $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Для любого $\varepsilon > 0$ покроем множество E не более чем счётным числом интервалов (α_i, β_i) длины $\beta_i - \alpha_i < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Тогда $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$, причём

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Поэтому функции, ограниченные и имеющие на некотором сегменте счётное число точек разрыва, всегда интегрируемы на этом сегменте. $\square$

Пример 118. Мера Лебега множества $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ равна нулю, но это же множество не является множеством меры нуль по Жордану. А лебегова мера множества иррациональных чисел этого же отрезка (а также всего отрезка) равна единице. $\square$

²Функция f называется *кусочно-непрерывной* на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна на этом сегменте всюду за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

¹Числовое множество E называется *множеством меры нуль (по Лебегу)*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует не более чем счётная система интервалов (a_i, b_i) , покрывающих все точки множества E , причём сумма длин этих интервалов меньше ε :

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i), \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

Если множество точек разрыва функции на сегменте $[a, b]$ имеет меру нуль, такую функцию называют *непрерывной почти всюду* на $[a, b]$.

Пример 119. Существуют множества мощности континуум, имеющие лебегову меру нуль. Примером такого множества является канторово множество. $\square$

Перейдём к основным свойствам интеграла Римана.

7. (*Линейность* интеграла Римана). Линейная комбинация

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) \quad (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

конечного числа интегрируемых функций $f_1(x), \dots, f_n(x)$ является интегрируемой функцией, причём

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_a^b f_i(x) dx.$$

8. (*Аддитивность* интеграла Римана). Если функция $f(x)$ интегрируема на смежных сегментах $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на их объединении – сегменте $[a, b]$, причём

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Если же функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и не интегрируема на $[b, c]$, то она не интегрируема на объединении этих сегментов.

Пример 120. Найти интеграл $\int_0^{4\pi} x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x) dx$.

Решение. Согласно свойству аддитивности, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x) dx &= \int_0^{\pi} x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} x dx - \int_{3\pi}^{4\pi} x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{x^2}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{x^2}{2} \Big|_{2\pi}^{3\pi} - \frac{x^2}{2} \Big|_{3\pi}^{4\pi} = -2\pi^2. \square \end{aligned}$$

9. (*Об интегрируемости на подсегменте*). Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема на любом сегменте $[c, d]$, содержащемся в сегменте $[a, b]$.

10. (*Интегрируемость произведения*). Если каждая из двух функций интегрируема на сегменте, то их произведение также интегрируемо на этом сегменте.

11. (*Независимость определённого интеграла от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования*). Имеем

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz = \dots$$

12. (Об интегрировании чётных и нечётных функций на симметричном относительно нуля промежутке). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в симметричном промежутке $[-a, a]$ ($a > 0$). Тогда в случае чётной функции $f(x)$ имеем

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx,$$

а в случае нечётной $f(x)$ имеем $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

13. (Об интегрировании периодических функций). Пусть $f(x)$ – периодическая непрерывная функция с периодом T . Тогда в любых промежутках длины T интеграл от $f(x)$ имеет одно и то же значение:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Пример 121. Если k – нечётное натуральное число, n – натуральное число, a – действительное число, то с учётом периода $T = 2\pi$ функции $\sin^k x$ имеем

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi n} \sin^k x dx &= \int_0^{2\pi n} \sin^k x dx = \int_0^{2\pi} \sin^k x dx + \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^k x dx + \dots + \int_{2\pi(n-1)}^{2\pi n} \sin^k x dx = \\ &= n \int_0^{2\pi} \sin^k x dx = n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^k x dx = 0. \quad \square \end{aligned}$$

7.4 Интегралы с переменными пределами. Интегрируемость по Риману и существование первообразной

«Вини себя или же не вини никого».

Марк Аврелий (121–180) – древнеримский император, философ.

Интегралы с переменными пределами. Пусть f интегрируема в собственном смысле на сегменте $[a, b]$ и $x_0 \in [a, b]$, тогда функция

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом* от функции f на $[a, b]$. Аналогично вводится понятие интеграла с переменным нижним пределом.

Рассмотрим вопрос о свойствах функции $F(x)$ и взаимосвязи между интегрируемостью функции по Риману и существованием у неё первообразной.

Теорема 1 (*о непрерывности интеграла с переменным пределом*). Пусть функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ непрерывна на $[a, b]$.

Теорема 2 (*Барроу*).¹ Пусть функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$. Если, более того, f непрерывна в точке $\xi \in [a, b]$, то функция $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ дифференцируема в точке ξ и $F'(\xi) = f(\xi)$.

Говоря о неопределённом интеграле, мы узнали, что любая непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом сегменте первообразную. Теперь можем уточнить: одной из первообразных является функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Сформулируем это в виде следствия из теоремы 2.

Следствие. Если $f \in C[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, то $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ является одной из (точных) первообразных f на $[a, b]$.

Теорема 3. Кусочно-непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция f имеет (обобщённую)¹ первообразную на этом сегменте.

О связи интегрируемости по Риману с наличием у функции первообразной.

1. *Существование функций, интегрируемых по Риману, но не имеющих первообразной.* Известно, что если функция $f(x)$ имеет конечную производную всюду на интервале (a, b) , то эта производная $f'(x)$ не может иметь на данном интервале ни точек устранимого разрыва, ни точек разрыва 1-го рода. То есть производная $f'(x)$ в каждой точке интервала (a, b) либо непрерывна, либо имеет разрыв 2-го рода. Поэтому любая функция, имеющая на отрезке разрыв первого рода, не может иметь на этом отрезке (точной) первообразной.

Пример 122. Интегрируемая по Риману функция, не имеющая первообразной:

$$f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad x \in (-1, 1).$$

Поясним, почему данная функция не имеет (точной) первообразной. В самом деле, любая функция вида

$$F(x) = \begin{cases} -x + C_1, & \text{если } x \in (-1, 0), \\ x + C_2, & \text{если } x \in [0, 1), \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные числа, имеет производную, равную $\operatorname{sgn} x$, при всех $x \neq 0$. Но даже «самая хорошая» из этих функций – непрерывная функция $F(x) = |x| + C$ (если $C_1 = C_2 = C$) не имеет производной при $x = 0$. Поэтому функция $\operatorname{sgn} x$ и, вообще, всякая кусочно-непрерывная функция не имеет точной первообразной на любом промежутке, содержащем точку разрыва.

¹Исаак Барроу (англ. Isaac Barrow; 1630–1677) – английский математик, физик и богослов, был учителем Ньютона.

¹Функция F называется *обобщённой первообразной* для функции f на $[a, b]$, если:
1) $F \in C[a, b]$; 2) $F'(x) = f(x)$ в точках непрерывности f .

Можно было объяснить по-другому: никакая функция, имеющая устранимые разрывы или разрывы 1-го рода, не может служить производной по отношению к другой функции. $\square$

Пример 123. Функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \text{ НОД}(m, n) = 1, x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0, 1]$, но не имеет первообразной на этом отрезке (см. задачи ниже).¹ $\square$

2. Существование функций, имеющих первообразную, но не интегрируемых по Риману. Рассмотрим иллюстрирующий данную возможность пример.

Пример 124. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

представляет собой пример функции, дифференцируемой в каждой точке сегмента $[a, b]$, но с неинтегрируемой по Риману производной на $[a, b]$.

В самом деле, её производная $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, и $f'(0) = 0$, не ограничена и, следовательно, не интегрируема по Риману. То есть производная представляет собой пример функции, имеющей первообразную, но не интегрируемой (в силу неограниченности) по Риману на сегменте. $\square$

Таким образом, существуют функции, интегрируемые по Риману, но не имеющие на промежутке интегрирования первообразной (неопределённый интеграл от них не существует). С другой стороны, имеются неинтегрируемые по Риману функции, у которых есть первообразная. И, конечно же, имеется большое количество функций, которые одновременно и интегрируемы в собственном смысле, и имеют первообразную на промежутке интегрирования.

В заключение отметим, что используя понятие интеграла с переменным верхним пределом, остаточный член в известной формуле Тейлора можно представить в интегральной форме, что иногда может быть удобно.

¹Функция Римана $R(x)$ ограничена (принимает значения в отрезке $[0, 1]$), периодична с периодом, равным 1: $f(x+1) = f(x)$. Функция непрерывна всюду на множестве иррациональных чисел, поскольку предел функции в каждой такой точке равен нулю, но разрывна во всех рациональных точках. При этом в каждой рациональной точке функция имеет строгий локальный максимум. Функция Римана нигде не дифференцируема, однако интегрируема по Риману на любом интервале. При этом интеграл везде равен нулю, так как функция равна нулю почти везде.

Теорема 4 (*об интегральной форме остаточного члена в формуле Тейлора*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз на отрезке $[a, b]$ и точка $x_0 \in [a, b]$. Тогда для любого $x \in [a, b]$ справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$

7.5 Задачи для самостоятельного решения

Вычисление интеграла как предела интегральной суммы:

№242. [8, № 2181] Найти интегральную сумму S_n для функции $f(x) = 1 + x$ на сегменте $[-1, 4]$, разбивая его на n равных промежутков и выбирая значения аргумента ξ_i ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) в серединах этих промежутков. Переходя к пределу, вычислить интеграл $\int_{-1}^4 (x + 1)dx$.

№243. [8, № 2182(a)] Для данной функции $f(x) = x^3$ найти нижнюю $\underline{S}_n$ и верхнюю $\overline{S}_n$ интегральные суммы на сегменте $-2 \leq x \leq 3$, деля его на n равных частей.

№244. [8, № 2185] Вычислить определённый интеграл, рассмотрев его как предел соответствующей интегральной суммы и производя разбиение промежутка интегрирования на n равных частей, выбирая в качестве ξ_i левые концы отрезков разбиения:

$$\int_{-1}^2 x^2 dx.$$

№245. [8, № 2186] Вычислить определённый интеграл, рассмотрев его как предел соответствующей интегральной суммы и производя разбиение промежутка интегрирования на n равных частей, выбирая в качестве ξ_i левые концы отрезков разбиения:

$$\int_0^1 a^x dx \quad (a > 0).$$

№246. [8, № 2187] Вычислить определённый интеграл, рассмотрев его как предел интегральной суммы и производя разбиение промежутка интегрирования на n равных частей, выбирая в качестве ξ_i левые концы отрезков разбиения:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

Указание: для упрощения интегральной суммы воспользуйтесь тождеством

$$\sum_{i=1}^k \sin(i\alpha) = \frac{\sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{где } \alpha \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

№247. [8, № 2191] Вычислить определённый интеграл, рассмотрев его как предел интегральной суммы и производя разбиение промежутка интегрирования так, чтобы точки ξ_i образовывали геометрическую прогрессию:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b).$$

№248. Выразить предел через определённый интеграл и вычислить его:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{2^n} \left(1 + \frac{k}{2^n}\right)},$$

где $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ – оператор произведения.

Задачи на интегральные суммы и интегрируемость:

№249. Какими свойствами должна обладать функция f , заданная на некотором отрезке, чтобы её нижняя и верхняя суммы Дарбу на этом отрезке совпали с некоторой интегральной суммой (Римана)?

№250. Привести примеры функций, определённых на отрезке $[-1, 1]$, у которых на этом отрезке нижняя и верхняя суммы Дарбу отличны от любой интегральной суммы (Римана).

№251. Доказать, что сумма интегрируемой и неинтегрируемой по Риману функций есть функция неинтегрируемая.

№252. Может ли сумма (произведение) двух неинтегрируемых по Риману функций быть интегрируемой функцией?

№253. Показать, что из интегрируемости произведения двух функций не следует, вообще говоря, интегрируемости каждой из них в отдельности.

№254. Показать, что если одна из функций интегрируема на некотором сегменте, а другая – нет, то их произведение может быть как неинтегрируемым, так и интегрируемым на этом сегменте.

№255. [8, № 2193.1] Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Доказать, что

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx,$$

где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $x_i \leq \theta_i \leq x_{i+1}$ ($i = \overline{0, n-1}$) и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $x_0 = a$, $x_n = b$.

№256. [8, № 2195] Показать, что функция Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где m и n ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) – взаимно простые числа, интегрируема на любом конечном промежутке. Чему равен $\int_a^b \varphi(x) dx$? (Рис. 108).

№257. Доказать, что функция Римана не имеет на отрезке $[0, 1]$ первообразной.

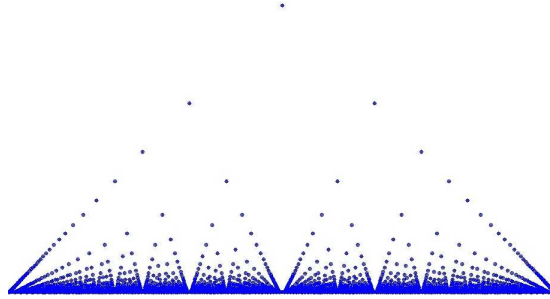


Рис. 108: Функция Римана.

№258. Пусть $f \in \mathbb{R}[a, b]$ и $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$. Доказать, что функция F дифференцируема почти всюду на $[a, b]$.

№259. [8, № 2197] Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

не интегрируема на любом промежутке.

№260. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin \frac{\pi}{x}), & \text{если } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет бесконечно много точек разрыва, но, тем не менее, интегрируема в собственном смысле на сегменте $[0, 1]$.

№261. [8, № 2200] Доказать, что если ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то её абсолютная величина $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причём

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

№262. [8, № 2201] Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на сегменте $[a, b]$, т. е. интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ существует. Является ли эта функция интегрируемой на $[a, b]$? Рассмотреть пример

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

№263. [8, № 2203] Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману, то обязательно ли сложная функция $f(g(x))$ также интегрируема? Рассмотреть

пример:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x \neq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{если } x = 0, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n} \text{ (функция Римана)}. \end{cases}$$

№264. Привести пример функции, интегрируемой на сегменте $[0, 1]$, но имеющей на этом сегменте бесконечное число точек разрыва.

№265. Привести пример интегрируемой функции с несчётным множеством точек разрыва.

№266. Привести пример функции $f(x)$, не интегрируемой по Риману на сегменте $[0, 1]$ и такой, что функция $f^2(x)$ интегрируема на этом сегменте.

№267. Привести пример функции, интегрируемой по Риману на сегменте $[a, b]$, неотрицательной, не являющейся на этом сегменте тождественно нулевой и такой, что $\int_a^b f(x)dx = 0$.

№268. Привести пример дифференцируемой на всей прямой функции, производная которой не интегрируема по Риману на сегменте $[0, 1]$.

№269. [8, № 2196] Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

интегрируема по Риману на сегменте $[0, 1]$.

№270. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

интегрируема по Риману на сегменте $[0, 1]$, но не имеет на этом сегменте обобщённой первообразной.

№271. Найти первообразную у функции $y = \{x\}$ (дробная часть) на всей числовой оси. Интегрируема ли эта функция по Риману на произвольном отрезке? Если да, вычислить интеграл $\int_0^x \{t\}dt$, если нет, объяснить, почему.

Разные задачи:

№272. Доказать, что если функция f непрерывна и $f(x) = \int_0^x f(t)dt$, то f тождественно равна нулю.

№273. Привести пример непрерывной на $[a, b]$ и не равной тождественно нулю функции f , для которой $\int_a^b f(x)dx = 0$.

7.6 Ответы и решения

242. Длина сегмента равна 5, поэтому $\Delta x_i = \frac{5}{n}$, $i = \overline{0, n-1}$. По условию $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Так как $x_i = -1 + \frac{5i}{n}$, $x_{i+1} = -1 + \frac{5(i+1)}{n}$, $f(\xi_i) = 1 + \xi_i$, то интегральная сумма

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + \xi_i) = \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{(-1 + \frac{5i}{n}) + (-1 + \frac{5(i+1)}{n})}{2} \right) = \\ &= \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{5}{n} \left(i + \frac{1}{2} \right) = \frac{25}{n^2} \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} \right) = 12,5. \end{aligned}$$

Заметим, что интегральная сумма не зависит от n , и поэтому искомый интеграл также равен 12,5.

243. В силу возрастания функции $f(x) = x^3$ и её непрерывности на сегменте $[-2, 3]$, при любом разбиении $-2 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 3$ функция достигает наименьшего и наибольшего значений, соответственно, на левом и правом концах отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. По условию, $\Delta x_i = \frac{5}{n}$, $x_i = -2 + \frac{5i}{n}$ ($i = \overline{0, n}$). Тогда

$$\underline{S}_n = \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(-2 + \frac{5i}{n} \right)^3, \quad \bar{S}_n = \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n \left(-2 + \frac{5i}{n} \right)^3.$$

Принимая во внимание, что $\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^k i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, получим окончательно

$$\underline{S}_n = 16\frac{1}{4} - \frac{176}{2n} + \frac{125}{4n^2}, \quad \bar{S}_n = 16\frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

244. Разделим отрезок $[-1, 2]$ на n равных частей и выберем в качестве ξ_i левые концы отрезков разбиения $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = \overline{0, n-1}$). Выпишем интегральную сумму

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \cdot f(\xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3}{n} \left(-1 + \frac{3i}{n} \right)^2 = \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{6}{n}i + \frac{9}{n^2}i^2 \right) = \\ &= \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1 - \frac{18}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{27}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \quad (\text{т. к. } \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}) \\ &= 3 - \frac{18}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{27}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \end{aligned}$$

$$= 3 - \frac{9(n-1)}{n} + \frac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2} = 3 - 9 + \frac{9}{n} + \frac{9(1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n})}{2}.$$

Тогда $\int_{-1}^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 3$.

245. Разделим отрезок $[0, 1]$ на n равных частей и выберем в качестве ξ_i левые концы отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = \overline{0, n-1}$): $x_i = \frac{i}{n}$ ($i = \overline{0, n}$). Тогда

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^i =$$

(т. к. это геометрическая прогрессия, то воспользуемся формулой $S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$)

$$= \frac{1}{n} \cdot a^0 \cdot \frac{1 - a^{\frac{n}{n}}}{1 - a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1 - a}{n(1 - a^{\frac{1}{n}})}.$$

Переходя к пределу в интегральной сумме, приходим к интегралу

$$\begin{aligned} \int_0^1 a^x dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - a}{n(1 - a^{\frac{1}{n}})} = (1 - a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - a^{\frac{1}{n}}} = \\ &= (a - 1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{a^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{a - 1}{\ln a} \end{aligned}$$

(здесь воспользовались пределом $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a$, $a > 0$).

246. Разделим отрезок $[0, \frac{\pi}{2}]$ на n равных частей и выберем в качестве ξ_i левые концы отрезков разбиения $[x_i, x_{i+1}]$, где $x_i = i \cdot \frac{\pi}{2n}$, $i = \overline{0, n-1}$. Интегральная сумма

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \cdot f(\xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{i\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \sin \frac{i\pi}{2n} = \\ &= \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi(n-1)}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4n} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n})}{\sin \frac{\pi}{4n}} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right) \cdot \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

247. Выберем точки разбиения x_i сегмента $[a, b]$ так, чтобы они образовывали геометрическую прогрессию: $x_i = a \cdot q^i$ ($i = \overline{0, n}$), $\xi_i = x_i$ ($i = \overline{0, n-1}$), $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Тогда

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta x_i}{\xi_i} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} - 1\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (q - 1) = n(q - 1) =$$

$$= n \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right). \text{ Поэтому } \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln \frac{b}{a}.$$

248. Обозначим $\Xi_n = \prod_{k=1}^{2^n} \left(1 + \frac{k}{2^n} \right)^{\frac{1}{2^n}}$ (Ξ – греческая заглавная буква «кси»), тогда $\ln \Xi_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \cdot \ln \left(1 + \frac{k}{2^n} \right)$, но это интегральная сумма для функции $f(x) = \ln(1+x)$ на отрезке $[0, 1]$ при выборе разбиения $x_{n-k} = \frac{1}{2^k}$, $k = \overline{0, n}$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \Xi_n = \int_0^1 \ln(1+x) dx$ и, соответственно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Xi_n = \exp \left(\int_0^1 \ln(1+x) dx \right) = \frac{4}{e}.$$

249. Функция f должна быть непрерывной на указанном отрезке.

250. Например, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ x-1, & \text{если } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

при условии, что точка $x = 0$ входит в число точек, разбивающих отрезок $[-1, 1]$ на частичные отрезки.

251. Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, а функция g – нет. Предположим, что их сумма $f + g$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда функцию g можно представить в виде разности двух интегрируемых функций: $g(x) \equiv (f(x) + g(x)) - f(x)$. Но это означает согласно свойству линейности интеграла Римана, что и сама функция g интегрируема на отрезке $[a, b]$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

252. Может, например:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x - \text{рационально,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально.} \end{cases}$$

Сумма $f + g \equiv 0$ и, следовательно, интегрируема на любом отрезке, в то время как каждая из этих функций (типа Дирихле) в отдельности не интегрируема ни на каком сегменте. Пример с произведением: $f \cdot h \equiv 0$ – интегрируема, где

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{рационально,} \\ 1, & \text{если } x - \text{иррационально.} \end{cases}$$

253. В качестве примера рассмотрим функции

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функция $f(x) \cdot g(x) \equiv 1$ интегрируема на любом отрезке, в отличие от каждой из них.

254. В качестве примера последней из ситуаций можно рассмотреть на произвольном сегменте пару функций

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad \text{и} \quad g(x) \equiv 0$$

255. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i &= \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\xi_i) \Delta x_i + \\ &+ \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx + 0, \end{aligned}$$

т. к.

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)) \Delta x_i \right| \leq$$

$(f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, следовательно, $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, т. е. $\exists M : |f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$. В силу равномерной непрерывности $\varphi(x)$ на $[a, b]$, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$: при $\Delta x_i < \delta$ колебание функции $\varphi(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$ удовлетворяет условию $\omega_{\varphi[x_i, x_{i+1}]} < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$. Тогда, если зафиксировать разбиение отрезка $[a, b]$ с $\Delta x_i < \delta$, то получим)

$$\leq M \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{\varphi[x_i, x_{i+1}]} \Delta x_i < M \cdot \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

256. Вспомним график этой функции (эта функция разрывна в рациональных точках и непрерывна в иррациональных). Функция чётная. Для доказательства воспользуемся необходимым и достаточным условием интегрируемости функции. Покажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$: как только $\Delta x_i < \delta$, то $\sum_i \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon$, где ω_i – колебание функции на i -ом отрезке разбиения.

Рассмотрим произвольный сегмент $[a, b]$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Каким бы ни было $k \in \mathbb{N}$, очевидно, что неравенство $\varphi(x) \geq \frac{1}{k}$ может выполняться не более чем в конечном числе точек. Соответственно, при любом разбиении сегмента $[a, b]$ неравенства $\omega_i \geq \frac{1}{k}$, где ω_i – колебание функции на i -м сегменте разбиения $[x_i, x_{i+1}]$, будут выполняться не более чем в конечном числе сегментов разбиения. На остальных сегментах колебание функции будет $\omega_i < \frac{1}{k}$. Те

точки, где колебание функции $\omega_i \geq \frac{1}{k}$, удалим из рассмотрения как не оказывающие влияния на существование (и значение) определённого интеграла. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ найдётся k такое, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot \Delta x_i < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{k} \cdot \Delta x_i = \frac{b-a}{k} < \varepsilon \quad \text{при } k > \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Получили, что для функции Римана $\varphi(x)$ выполнен критерий интегрируемости. На примере этой функции видно, что функция может иметь бесконечно много точек разрыва и при этом быть интегрируемой по Риману.

Покажем, что значение интеграла равно 0. В самом деле, в силу интегрируемости $\varphi(x)$ имеем $\int_a^b \varphi(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \underline{S}_n$, где $\underline{S}_n$ – нижняя сумма Дарбу для функции $\varphi(x)$ на $[a, b]$. Но при любом разбиении сегмента $[a, b]$, очевидно, $\underline{S}_n = 0$. Следовательно, $\int_a^b \varphi(x) dx = 0$.

257. От противного, пусть существует функция F такая, что $F'(x) = \varphi(x)$, $\forall x \in [0, 1]$ ($\varphi(x)$ – функция Римана). Тогда, по теореме Дарбу, функция $\varphi(x)$ должна принимать все промежуточные значения между своим наименьшим и наибольшим значениями на отрезке $[0, 1]$. Однако $\varphi(x)$ принимает только значения 0 и вида $\frac{1}{n}$, где n – натуральное число. Значит, функция Римана не может являться производной никакой функции F , т. е. она не имеет первообразной на указанном отрезке.

258. По теореме Барроу имеем $F'(x) = f(x)$ в каждой точке непрерывности функции f . Осталось воспользоваться критерием интегрируемости Лебега.

259. Рассмотрим произвольный сегмент $[a, b]$ и произвольное его разбиение, и покажем, что (ограниченная) функция Дирихле не интегрируема на этом промежутке. С одной стороны, если выбирать на каждом сегменте разбиения $[x_i, x_{i+1}]$ в качестве промежуточной точки ξ_i иррациональное число, то для интегральной суммы получим

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\xi_i) \Delta x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} S_n = 0.$$

С другой стороны, если в качестве ξ_i брать рациональные точки, то

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\xi_i) \Delta x_i = b - a \quad \Rightarrow \quad \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} S_n = b - a.$$

Поскольку результат оказался зависящим от выбора ξ_i , то функция Дирихле не интегрируема в собственном смысле на $[a, b]$.

260. Очевидно, что функция f ограничена на $[0, 1]$ и имеет разрывы в точках $x_0 = 0$ и $x_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда

на интервале $(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4})$ лежат точки x_0 и x_k , где $k > \frac{4}{\varepsilon}$, а на отрезке $[\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ – конечное число точек разрыва $x_1, \dots, x_p$, где $p \leq \frac{4}{\varepsilon}$, $p+1 > \frac{4}{\varepsilon}$. Каждую из точек x_i , $i = 1, \dots, p$, покроем интервалом $(x_i - \frac{\varepsilon}{4p}, x_i + \frac{\varepsilon}{4p})$. Таким образом, все точки разрыва функции f на отрезке $[0, 1]$ можно покрыть конечным числом интервалов, сумма длин которых равна $\frac{\varepsilon}{2} + p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$. Так как множество точек разрыва функции имеет жорданову меру нуль, то это означает интегрируемость функции.

261. Воспользуемся критерием интегрируемости и рассмотрим колебание функции $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$, которое запишем в виде:

$$\omega_f[x_i, x_{i+1}] = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|.$$

В силу неравенства $||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$, где $x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]$, имеем, что колебание функции $|f(x)|$ на $[x_i, x_{i+1}]$ равно

$$\omega_{|f|}[x_i, x_{i+1}] = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} ||f(x')| - |f(x'')|| \leq \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|,$$

т. е. $\omega_{|f|} \leq \omega_f$ на $[x_i, x_{i+1}]$ при любом разбиении сегмента $[a, b]$. В силу выполнения критерия интегрируемости для $f(x)$, из последнего неравенства следует, что он выполнен и для $|f(x)|$.

Покажем, далее, справедливость неравенства. Поскольку $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, то, интегрируя это неравенство, получим

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

т. е.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

262. Пример показывает, что для интеграла Римана из абсолютной интегрируемости не следует, вообще говоря, обычная интегрируемость (а вот в случае с несобственными интегралами, которые мы будем изучать позже, из абсолютной интегрируемости всегда следует интегрируемость).

263. Нет, не обязательно. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ (см. пример) имеем

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi(x) = 0, \text{ т. е. } x - \text{иррационально,} \\ 1, & \text{если } \varphi(x) \neq 0, \text{ т. е. } x - \text{рационально.} \end{cases}$$

Это функция Дирихле и она, как известно, не интегрируема по Риману.

264. Например, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin \frac{1}{x}), & \text{если } x \in (0, 1]; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ В самом деле, найдём

точки разрыва (1-го рода) этой ограниченной функции: $\sin \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\pi n}$,

$n \in \mathbb{N}$ (плюс точка $x = 0$). Количество точек разрыва счётно (имеет жорданову меру нуль), следовательно, в силу критерия интегрируемости по Лебегу, функция интегрируема по Риману на $[0, 1]$.

265. Например, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K; \\ 0, & \text{если } x \notin K, \end{cases}$ где K – канторово множество.

266. Например, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, x \in [0, 1]; \\ -1, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x \in [0, 1]. \end{cases}$ Эта функция не

интегрируема по Риману, так как для неё не выполняется критерий интегрируемости Лебега (множество точек разрыва имеет лебегову меру, равную 1). При этом $f^2(x) \equiv 1$ – интегрируемая функция.

267. Например, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \frac{a+b}{2}; \\ 0, & \text{если } x \in [a, \frac{a+b}{2}) \cup (\frac{a+b}{2}, b]. \end{cases}$

268. Например, $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

269. Преобразуем функцию к виду: $f(x) = \{1/x\}$, где $\{\cdot\}$ – дробная часть. Эта функция ограничена $|f(x)| \leq 1$ и терпит разрывы 1-го рода в точках $x = 0$, $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку множество точек разрыва имеет жорданову меру нуль, то функция интегрируема на указанном сегменте. Покажем, что множество $\{\frac{1}{n}\}$ ($n \in \mathbb{N}$) имеет жорданову меру нуль. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ – любое достаточно малое действительное число. Очевидно, что $\exists N$: при $n > N$ имеем $0 < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Каждую из оставшихся точек $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots, N$, покроем интервалом длины $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Тогда сумма длин этих интервалов равна $\varepsilon \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Всё множество оказалось покрытым конечной системой $N + 1$ интервала, сумма длин которых меньше ε , что и требовалось показать.

270. Функция f интегрируема по Риману на $[0, 1]$, т. к. она ограничена и монотонна на этом сегменте. Предположим, что существует такая непрерывная на $[0, 1]$ функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [0, 1] \setminus E$, где E – конечное множество точек из $[0, 1]$. Тогда найдётся такое n , что на сегменте $[\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ нет точек из E , т. е. $F'(x) = f(x)$ всюду на этом отрезке. Тогда по свойству Дарбу функция f должна на этом сегменте принимать все значения между $f(\frac{3}{2^{n+2}}) = \frac{1}{2^{n+1}}$ и $f(\frac{1}{2^{n-1}}) = \frac{1}{2^n}$. Но ни одного значения из интервала $(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n})$ функция f не принимает. Следовательно, предположение о существовании обобщённой первообразной неверно.

271. Первообразная не существует, так как производные не могут иметь разрывы 1-го рода. Тем не менее, функция интегрируема по Риману на любом отрезке, поскольку имеет на нём конечное число точек разрыва. В частности,

существует интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_0^x \{t\} dt = \frac{1}{2}[x] + \frac{1}{2}\{x\}^2$$

(интеграл равен сумме площадей $[x]$ прямоугольных равнобедренных треугольников с катетом 1 и площади одного прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом x).

272. Так как f непрерывна, то интеграл $\int_0^x f(t)dt$ является дифференцируемой функцией и $\frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(t)dt \right) = f(x)$. В силу тождества $f(x) = \int_0^x f(t)dt$ получаем, что $f'(x) = f(x)$ для любого x . Покажем, что решением дифференциального уравнения $f'(x) = f(x)$ могут являться только функции вида $f(x) = Ce^x$, где C – некоторая постоянная. Действительно, пусть функция f удовлетворяет данному уравнению. Тогда $(f(x)e^{-x})' = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} \equiv 0$. Значит, $f(x)e^{-x} = C$, т. е. $f(x) = Ce^x$.

Вернёмся к исходной задаче. Подставим функцию $f(x) = Ce^x$ в уравнение $f(x) = \int_0^x f(t)dt$, получим $Ce^x = \int_0^x Ce^t dt = C(e^x - 1)$. Из последнего соотношения вытекает, что $C = 0$, т. е. $f(x) \equiv 0$.

273. Например, $f(x) = x - \frac{a+b}{2}$, $x \in [a, b]$.

8 СЕМИНАР: Вычисление определённых интегралов

«Самая хорошая работа — это высокооплачиваемое хобби».

Генри Форд (Henry Ford; 1863–1947) — американский промышленник, владелец заводов по производству автомобилей по всему миру, изобретатель. Известен тем, что впервые стал использовать промышленный конвейер для поточного производства автомобилей.

С целью защиты авторских прав **НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!**

Будучи знакомыми с неопределёнными интегралами и имея опыт их вычисления, обратимся теперь к способам вычисления определённых интегралов.

8.1 Вычисление интеграла как предела интегральной суммы

На практике достаточно редко вычисляют определённые интегралы как пределы интегральных сумм, так как это бывает неудобно из-за массивных выкладок. Тем не менее, с теоретической точки зрения полезно продемонстрировать на отдельных примерах, как это осуществляется. И это было сделано на предыдущем семинаре.

В данном параграфе рассмотрим другие способы вычисления определённых интегралов.

8.2 Сведение к табличным интегралам

Иногда интеграл удаётся вычислить, не прибегая к специальным методам, а просто сводя его к табличным с помощью различных преобразований подынтегрального выражения и используя свойства интегралов. К преобразованиям такого рода относят следующие:

- добавление (с одновременным вычитанием) к подынтегральной функции константы или некоторого выражения; обычно за этим следует разбиение интеграла в сумму более простых интегралов;
- одновременное умножение или деление числителя и знаменателя дроби под знаком интеграла на некоторое выражение (например, при интегрировании функций с радикалами иногда полезен приём умножения на сопряжённое выражение);

- если подынтегральная функция содержит модуль или целую часть какого-либо выражения, то бывает необходимо, используя свойство аддитивности, разбить промежуток интегрирования на части таким образом, чтобы на каждом из них модуль (целая часть и т. д.) раскрывались бы однозначно;
- выделение полных квадратов (кубов);
- использование формул сокращённого умножения;
- выделение у подынтегральной дроби целой части;
- выделение в числителе дроби производной от знаменателя;
- использование алгебраических тождеств, тригонометрических и гиперболических формул и т. п.

8.3 Формула Ньютона–Лейбница. Дифференцирование интегралов с переменными пределами

«Работай постоянно, не почитай работу для себя бедствием или бременем и не желай себе за это похвалы и участия. Общее благо – вот чего ты должен желать».

Марк Аврелий (121–180) – древнеримский император, философ.

Формула Ньютона–Лейбница. Данная теорема имеет фундаментальное значение и устанавливает связь между определённым и неопределённым интегралами. Задача вычисления определённого интеграла сводится к задаче вычисления неопределённого интеграла (используется первообразная функция). В этой формуле, как обычно, предполагается, что $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$.¹

Теорема 1 (*формула Ньютона–Лейбница, или Основная теорема интегрального исчисления*). Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, $F(x)$ – любая её первообразная на этом сегменте. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \quad (1)$$

¹Формула Ньютона–Лейбница – это одна из немногих формул-связок, объединяющих казалось бы различные разделы математики воедино. Если бы не было формулы Ньютона–Лейбница, то неопределённые интегралы не нашли бы приложения, а определённые интегралы нельзя было бы вычислить аналитически. Именно эта формула делает интегральное исчисление важнейшим инструментом исследования динамических процессов. Любой такой процесс описывается дифференциальными (или интегральными) уравнениями, решаемыми в интегралах.

Выражение $F(x) \Big|_a^b$ называют двойной подстановкой.²

Замечание 1. Эта формула верна и в случае, когда $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[a, b]$, но тогда $F(x)$ будет, вообще говоря, не точная первообразная, а некоторая непрерывная на $[a, b]$ функция такая, что $F'(x) = f(x)$ в каждом интервале непрерывности $f(x)$ (обобщённая первообразная).

Пример 125. [8, № 2206] Найти определённый интеграл и нарисовать соответствующую криволинейную трапецию, площадь которой численно равна интегралу:

$$\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx.$$

Решение. Имеем $\int_{-1}^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_{-1}^8 = 11\frac{1}{4}$. Рисунок сделайте самостоятельно. $\square$

Замечание 2. На использовании формулы (1) основан один из способов вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$, когда вместо определённого вычисляется аналогичный неопределённый интеграл $\int f(x) dx$, берётся любая первообразная, а затем применяется формула Ньютона–Лейбница. Далее будут рассмотрены другие способы вычисления определённых интегралов, опирающиеся на применение формул замены переменной и интегрирования по частям, адаптированных на этот случай.

Пример 126. Вычислить $\int_0^2 3x\sqrt{x^2+4} dx$.

Решение. Найдём неопределённый интеграл

$$\begin{aligned} \int 3x\sqrt{x^2+4} dx &= \frac{3}{2} \int \sqrt{x^2+4} \cdot 2x dx = \frac{3}{2} \int \sqrt{x^2+4} d(x^2) = \frac{3}{2} \int \sqrt{x^2+4} d(x^2+4) = \\ &= \left| t = x^2 + 4 \right| = \frac{3}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \sqrt{t^3} + C = \sqrt{(x^2+4)^3} + C. \end{aligned}$$

Возьмём $F(x) = \sqrt{(x^2+4)^3}$ и, применяя (1), получим

$$\int_0^2 3x\sqrt{x^2+4} dx = \sqrt{(x^2+4)^3} \Big|_0^2 = 8(2\sqrt{2}-1). \square$$

Дифференцирование интегралов с переменными пределами. В данном пункте речь пойдёт о дифференцировании интегралов с переменными пределами, т. е. интегралов, нижний (и/или) верхний предел которого зависит от переменной, по которой производится дифференцирование.

²В более общей формулировке эта теорема звучит так: если f интегрируема на $[a, b]$ и имеет на этом сегменте первообразную F , то справедлива формула Ньютона–Лейбница (1).

1. Из формулы Ньютона–Лейбница непосредственно следует:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad \frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = -f(x).$$

Пример 127. Найти $\frac{d}{dx} \int_x^3 e^{-t^3} dt$.

Решение. Пусть $F(t)$ – первообразная к $f(t) = e^{-t^3}$, тогда

$$\frac{d}{dx} \int_x^3 e^{-t^3} dt = \frac{d}{dx} (F(3) - F(x)) = -f(x) = -e^{-x^3}. \quad \square$$

2. Рассмотрим теперь более сложный случай, когда пределы интегрирования есть дифференцируемые функции от x , но при этом подынтегральная функция $f(t)$ не зависит от x :

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = ?$$

Задачи такого рода также могут быть решены при помощи формулы Ньютона–Лейбница.

Пример 128. Вычислить $\frac{d}{d(x^3)} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt$.

Решение. Обозначим $f(t) = \sqrt{1+t^4}$, пусть $F(t)$ – какая-либо из первообразных для функции $f(t)$, тогда по формуле Лейбница при $x \neq 0$ имеем:

$$\frac{d}{d(x^3)} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt = \frac{d(F(x^2) - F(0))}{d(x^3)} = \frac{(F'(x^2) \cdot 2x - 0)dx}{3x^2 dx} = \frac{f(x^2) \cdot 2x}{3x^2} = \frac{2\sqrt{1+x^8}}{3x}.$$

3*. Наконец, в самом общем виде может понадобиться продифференцировать по переменной x интеграл, у которого и пределы интегрирования, и подынтегральная функция зависят от x :

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt.$$

Для решения таких задач, вообще говоря, требуется умение работать с функциями нескольких переменных (на ВМК МГУ эти задачи исследуются на втором курсе в рамках темы «Интегралы, зависящие от параметров»). Если вы ещё не знакомы с этим разделом, то данный способ можно пропустить. В любом случае, забегаая вперёд, приведём его ниже для любопытных студентов.

Дальнейшим обобщением формулы Лейбница является теорема.

Теорема 2 (*Формула Лейбница для дифференцирования интегралов по параметру x*). Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна как функция двух переменных вместе со своей частной производной¹ $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ в прямоугольнике $[\alpha, \beta] \times [c, d]$ (сегмент $[\alpha, \beta]$ включает в себя множества значений $a(x), b(x)$, а функции $a(x), b(x)$ дифференцируемы на $[c, d]$). Тогда зависящий от x как от параметра интеграл

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt$$

дифференцируем по x на $[c, d]$, причём его производная находится по формуле

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} I(x) &= \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt = \\ &= f(b(x), x) \cdot \frac{d(b(x))}{dx} - f(a(x), x) \cdot \frac{d(a(x))}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Вернёмся к последнему примеру и решим задачу с помощью формулы (2).

Пример 129. Вычислить $\frac{d}{d(x^3)} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt$.

Решение. Обозначим $f(t) = \sqrt{1+t^4}$ (не зависит от x), тогда по формуле Лейбница (2) имеем:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt = \sqrt{1+(x^2)^4} \cdot (x^2)' - \sqrt{1+0^4} \cdot 0' + \int_0^{x^2} 0 dt = 2x\sqrt{1+x^8}.$$

В итоге приходим к тому же ответу: $\frac{2\sqrt{1+x^8}}{3x}$. $\square$

8.4 Замена переменной

«Русский тот, кто Россию любит и ей служит».

Петр 1 Великий (1672–1725) – последний царь всея Руси и первый Император Всероссийский из династии Романовых. В истории остался как великий реформатор и человек, «прорубивший окно в Европу».

Изложим один из сильнейших приёмов для интегрирования функций – *метод замены переменной*, или *метод подстановки*, в применении к определённым интегралам Римана. Рассмотрим две теоремы.

¹Производная по x при фиксированном t .

Теорема 3 (замена переменной путём внесения функции $t'(x)$ под знак дифференциала). Пусть дан определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$, в котором подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где

1) $t = t(x)$ – непрерывно дифференцируемая на сегменте $[a, b]$ функция, и $[c, d]$ – множество её значений на $[a, b]$;

2) функция $g(t)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$.

Тогда справедлива следующая формула перехода от переменной интегрирования x к переменной интегрирования t :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(t(x)) \cdot t'(x)dx = \int_{t(a)}^{t(b)} g(t)dt.$$

Замечание 1. При замене переменной в определённом интеграле меняется не только подынтегральная функция, но и пределы интегрирования.

Замечание 2. К новой переменной интегрирования t переходят в тех случаях, когда получаемая в результате новая подынтегральная функция $g(t)$ удобнее для интегрирования по сравнению с исходной подынтегральной функцией $f(x)$. Основная сложность этого метода состоит в том, чтобы «увидеть» в исходном подынтегральном выражении $f(x)dx$ более простое для интегрирования выражение $g(t(x))t'(x)dx = g(t)dt$. Практически реализация метода заключается во внесении функции $t'(x)$ под знак дифференциала dx с образованием нового дифференциала dt .

Замечание 3. Обращаем внимание на то, что в этой теореме не предполагается монотонности функции $t(x)$.

Пример 130. Вычислить интеграл $\int_{-1}^2 x(3x^4 - 4x^2 + 1)dx$.

Решение. Эта задача легко решается стандартным способом, однако её можно решить весьма оригинально, используя метод замены переменной:

$$\int_{-1}^2 x(3x^4 - 4x^2 + 1)dx = \int_{-1}^2 (x^3 - x)(3x^2 - 1)dx = \int_{-1}^2 (x^3 - x)d(x^3 - x) = \int_0^6 tdt = 18.$$

Заметим, что функция $t = x^3 - x$ непрерывно дифференцируема, но не является монотонной на $[-1, 2]$. $\square$

Теорема 4 (замена переменной путём использования подстановки $x = x(t)$). Пусть выполнены следующие условия:

1) $x = x(t)$ – непрерывно дифференцируемая на сегменте $[t_0, T]$ функция, и сегмент $[c, d]$ – множество её значений на $[t_0, T]$;

2) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$;

3) $x(t_0) = a, x(T) = b$.

Тогда справедлива следующая формула перехода от переменной интегрирования x к новой переменной t :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^T f(x(t)) \cdot x'(t)dt.$$

Замечание 1. В этом утверждении не предполагается монотонность функции $x(t)$.

Замечание 2. При замене переменной в определённом интеграле нет необходимости возвращаться к старой переменной.

Нередки ситуации, когда для решения одной и той же задачи могут существовать различные подстановки. Умение подобрать наиболее эффективную в данной конкретной ситуации подстановку определяет, в том числе, культуру интегрирования учащегося. Подчеркнём ещё раз, что замена переменной – наиболее мощный и часто используемый метод при вычислении интегралов от иррациональных и трансцендентных функций.

Как правило, подобрать подходящую замену в сложных случаях – целое искусство. В некоторых случаях удаётся сформулировать общие рекомендации по заменам, ориентируясь на конкретный класс интегрируемых функций. Например, разработаны и проверены практикой специальные рационализирующие подстановки при интегрировании иррациональных алгебраических функций; существуют рекомендации по заменам в классе тригонометрических функций. Многие из таких подстановок рассмотрены в пособии автора [31].

Пример 131. Вычислить интеграл $\int_{-3/2}^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Решение. В силу чётности подынтегральной функции интеграл сводится к интегралу $2 \int_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$. Чтобы избавиться от радикала, сделаем рационализирующую тригонометрическую подстановку $x = 3 \sin t$, где $t \in [0, \frac{\pi}{6}]$. Тогда $dx = 3 \cos t dt$, $\sqrt{9-x^2} = 3|\cos t| = 3 \cos t$ и приходим к простому интегралу тригонометрического вида

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/6} \frac{9 \sin^2 t}{3 \cos t} \cdot 3 \cos t dt &= 18 \int_0^{\pi/6} \sin^2 t dt = 9 \int_0^{\pi/6} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= 9 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/6} = 9 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 132. Возможно ли вычисление интеграла $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ с помощью подстановки $t = \frac{1}{x}$?

Решение. Нет. Если сделать подстановку $x = \frac{1}{t}$ (не проверяя условий её применимости в данной задаче), то придём к неверному результату:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^1 \frac{d(\frac{1}{t})}{1+(\frac{1}{t})^2} = - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\operatorname{arctg} t \Big|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2}.$$

На самом деле, если воспользоваться соответствующим табличным интегралом, то получим другое (верное!) значение:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ошибка в первом случае связана с тем, что изменению x на отрезке $[-1, 1]$ соответствует изменение $t = \frac{1}{x}$ не на отрезке $[-1, 1]$, а на объединении полупрямых $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Тем самым, указанная замена просто не удовлетворяет требованиям теоремы о замене переменной, и вычислять интеграл с её помощью нельзя.

□

8.5 Интегрирование по частям

«Запад ошибается насчёт России. Он думает, что мы так ослаблены войной, что всё наше могущество уже иссякло. Это ошибка. Нацию, состоящую из ста миллионов людей, способных жертвовать собой за идею, не так легко стереть. Россия жива, и, если будут перейдены известные пределы, она решится воевать... И тогда уж несдобровать любому чужеземцу».

М.Д. Скобелев (1843–1882) – выдающийся русский военачальник. Участвовал в Среднеазиатских завоеваниях Российской империи и Русско-турецкой войне 1877–1878 годов, освободитель Болгарии.

Теорема 5 (интегрирование по частям). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны вместе со своими производными (1-го порядка) на сегменте $[a, b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)d(g(x)) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)d(f(x)),$$

где $f(x)g(x) \Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. Эта формула в интегральном исчислении называется *формулой интегрирования по частям*.

Пример 133. [8, № 2244] Вычислить интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Положим в формуле интегрирования по частям $f(x) = \arctg x$, $g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, тогда получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx &= \frac{x^2}{2} \arctg x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(1+x^2) - 1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arctg x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Известно обобщение формулы интегрирования по частям:

$$\int_a^b f \cdot g^{(n+1)} dx = (f \cdot g^{(n)} - f' \cdot g^{(n-1)} + \dots + (-1)^n f^{(n)} \cdot g) \Big|_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)} \cdot g dx,$$

где функции f, g и все встречающиеся производные предполагаются непрерывными, а аргументы у функций для краткости опущены.

Пример 134. Почему на отрезке $[0, 1]$ не выполняется формула интегрирования по частям для функций $f(x) \equiv 1$ и $g(x)$ – функция Римана?

Решение. Функция Римана не дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, а значит, условие теоремы не выполнены. $\square$

8.6 Вычисление предела последовательности как предела интегральной суммы. Приближённое вычисление интегралов

Сведение вычисления предела последовательности к вычислению интеграла. В некоторых случаях числовую последовательность можно интерпретировать как интегральную сумму для некоторой функции на определённом отрезке. Тогда возникает ещё один способ вычисления её предела – переходом к определённому интегралу Римана. Продемонстрируем этот приём на примере.

Пример 135. [8, № 2219] С помощью определённого интеграла найти предел последовательности

$$x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}.$$

Решение. По условию $x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}$. А теперь представим себе, что требуется вычислить определённый интеграл Римана от функции $f(x) = x$ по отрезку $[0, 1]$, разбивая этот отрезок на n равных частей точками $x_i = i/n$, $i = \overline{0, n}$ (т. е. $\Delta x_i = 1/n$), и выбирая значения промежуточных точек $\xi_i = x_i$. Составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}.$$

Очевидно, данная сумма и наша последовательность есть одно и то же. Тогда предел последовательности совпадает с пределом интегральной суммы $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, т. е. с интегралом Римана

$$\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Приближённое вычисление интегралов. Если интеграл не поддаётся аналитическому вычислению, а также в случаях построения интегральных оценок, не требующих точного знания интеграла, интегралы можно рассчитывать приближённо с некоторой степенью точности. Так, в курсе *вычислительных методов* изучаются специальные способы приближённого вычисления интегралов с помощью различных разностных схем (методы прямоугольников, трапеций, парабол, сплайн-аппроксимация и пр. подходы).

8.7 Задачи для самостоятельного решения

Задачи на применимость формулы Ньютона–Лейбница:

№274. Пусть $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in [a, b]$. Обязательно ли интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует и равен $F(b) - F(a)$?

№275. Пусть $f \in R[a, b]$, $F \in C[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Обязательно ли $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$?

Вычислить интегралы с помощью формулы Ньютона–Лейбница, используя различные преобразования и сводя их к табличным:

$$\text{№276. } [8, \text{ № 2211}] \int_0^2 |1 - x| dx;$$

$$\text{№277. } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^4 - 1};$$

$$\text{№278. } \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx;$$

$$\text{№279. } \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx;$$

$$\text{№280. } \int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} dx;$$

$$\text{№281. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx;$$

$$\text{№282. } \int_1^3 \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x};$$

$$\text{№283. } \int_0^{0,1 \ln 2} (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^{10} dx;$$

$$\text{№284. } \int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$$

Объяснить, почему формальное применение формулы Ньютона–Лейбница приводит к неверным результатам:

$$\text{№285. } [8, \text{ № 2216(a)}] \int_{-1}^1 \frac{dx}{x};$$

$$\text{№286. } [8, \text{ № 2216(б)}] \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2 + \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\text{№287. } [8, \text{ № 2216(в)}] \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) dx.$$

№288. Найдя обобщённую первообразную, вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right) dx.$$

Используя свойство аддитивности, вычислить интегралы от ограниченных разрывных функций:

№289. [8, № 2309] $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx;$

№290. [8, № 2310] $\int_0^2 [e^x] dx;$

№291. [8, № 2313] $\int_1^{n+1} \ln[x] dx, n \in \mathbb{N};$

№292. $\int_0^2 \frac{1 - [x]}{2x - [x] + 1} dx;$

№293. $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{[2x - 1]}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$

№294. Найти n из уравнения: $\exp \left(\int_1^{n+1} \ln[x] dx \right) = 2020!$

Заменой переменной интегрирования найти интегралы:

№295. [8, № 2245] $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5 - 4x}}.$

Указание: положить $t = \sqrt{5 - 4x}$.

№296. $\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x - 1}}.$

Указание: положить $t = \sqrt[3]{x - 1}$.

№297. [8, № 2246] $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx;$

Указание: сделать подстановку $x = a \sin t$, где $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

№298. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{2 - x^2}};$

Указание: сделать подстановку $x = \sqrt{2} \sin t$, где $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

№299. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx;$

Указание: положить $t = \sqrt{e^x - 1}$.

№300. [8, № 2249] $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1 - x)}} dx.$

№301. [8, № 2257] Доказать, что если $f(x) \in C[0, 1]$, то

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

$$\text{№302. [8, № 2263]} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

$$\text{№303. [8, № 2269]} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx;$$

№304. Вычислить интегралы, полагая $t = x - \frac{1}{x}$:

$$\text{а) } \int_1^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

$$\text{№305. } \int_1^3 \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} dx;$$

$$\text{№306. } \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$$

$$\text{№307. } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}. \quad \text{Указание: положить } x = 2 \operatorname{tg} t.$$

$$\text{№308. } \int_1^8 \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}} dx.$$

Указание: проинтегрировать как дифференциальный бином.

$$\text{№309. } \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x) dx;$$

$$\text{№310. Вычислить } \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt{x^2 - 10x + 13}}.$$

Указание: сделайте замену $z = \frac{1}{x-2}$.

$$\text{№311. Вычислить } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x}.$$

Указание: сделайте замену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

$$\text{№312. Решить уравнение } \int_{\ln 2}^x \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{№313. Пусть } f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ D(x), & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \text{ где } D(x) - \text{функция Дирихле.}$$

Указать, какое из следующих равенств неверно и почему:

$$\text{а) } \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin t) \cos t dt; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} f(\sin t) \cos t dt.$$

Интегрированием по частям найти интегралы:

№314. [8, № 2239] $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx;$

№315. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx;$

№316. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x + 5) \sin 4x dx;$

№317. [8, № 2242] $\int_{1/e}^e |\ln x| dx;$

№318. $\int_1^e (x^2 + 1) \ln x dx;$

№319. [8, № 2263] $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$

№320. [8, № 2274] $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx;$

№321. [8, № 2279] $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx;$

№322. $\int_0^1 x \sin(\ln x) dx.$

№323. [8, № 2281] С помощью формул понижения степени вычислить интеграл, зависящий от натурального параметра n :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

Вычислить предел сведением к определённом интегралу:

№324. [8, № 2222] Рассматривая выражение под знаком предела как интегральную сумму для некоторой функции на некотором отрезке (подобрать), определить, какому определённому интегралу равен этот предел, и найти его:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

№325. С помощью определённого интеграла найти предел последовательности

$$x_n = \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$$

Задачи на интегралы с переменными пределами:

№326. Найти: а) $\frac{d}{da} \int_a^b e^{-x^2} dx;$ б) $\frac{d}{dx} \int_a^b e^{-x^2} dx;$ в) $\frac{d}{db} \int_a^b e^{-x^2} dx.$

№327. Найти: а) $\frac{d}{db} \int_a^{b^2} \ln(1+x^2)dx$; б) $\frac{d}{da} \int_{\sin a}^{\cos a} \ln(1+x^2)dx$.

№328. Найти $\Phi'(x)$, если $\Phi(x) = \int_{\ln x}^{\ln^2 x} e^{-t^2} dt$.

№329. [13, с. 17] Найти $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{-\frac{x}{3}} \frac{dt}{\ln^3 2t}$.

№330. [13, с. 21] Дана функция $F(x) = \int_{-x}^4 \frac{e^t - 1}{|t|} dt$. Вычислить правую и левую производные $F'_+(0)$ и $F'_-(0)$.

№331. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$, $a < b$ и $g(x) = \int_a^b f(x+t)dt$. Вычислить $g'(x)$.

№332. Функцию $y(x) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^x \frac{\operatorname{tg} t}{t} dt$ исследовать на локальный экстремум на интервале $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$.

№333. Найти точки локального экстремума функции

$$F(x) = \int_0^x e^{u^2} (u^2 - 3u + 2) du.$$

№334. Найти все функции $f \in C[0, +\infty)$, удовлетворяющие условию

$$\sin \left(\int_0^x f(u) du \right) = \frac{x}{1+x} \quad \text{при всех } x \geq 0.$$

Найти пределы:

№335. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x}$;

№336. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{1+x^2}}$;

№337. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt}$.

№338. Используя формулу Лейбница, вычислить

$$\frac{d}{d(\sin x)} \int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \cos(\pi t^2) dt.$$

№339. Найти $\frac{d^2}{dx^2} \left(\int_1^{x^2} \sin 10t \, dt \right)$.

№340. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

а $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$. Существует ли $F'(0)$ (если да, то чему равна эта производная, если нет, то почему)?

Разные задачи:

№341. Найти наименьшее и наибольшее значения на $[-1, 1]$ функции

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2} dt.$$

№342. Какому условию должны удовлетворять числа a и b , чтобы

$$\int_a^b x dx = \int_a^b [x] dx ?$$

№343. [8, № 2218] Вычислить интеграл $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$.

№344. Найти $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} \, dx$, где E – множество тех значений отрезка $[0, 4\pi]$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

№345. Найти $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^2} \cdot \sin^5 x \, dx$, используя нечётность подынтегральной функции.

№346. Найти $\int_0^\pi \cos^5 x \, dx$ двумя способами: вычислив интеграл и используя центральную симметрию графика относительно точки $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

№347. Вычислить наиболее оптимальным способом:

$$\int_{-1}^1 (x^3 - 3 \arcsin^5 x + 7x^4 \operatorname{arctg}(\sqrt[5]{x})) \, dx.$$

№348. Вычислить наиболее оптимальным способом:

$$\int_1^{2\pi+1} (x + \sin^3 x - 3 \sin 2x) dx.$$

№349. Вычислить $\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + 2020x) dx$.

№350. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$.

№351. Вычислить $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{2A} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$.

№352. Вычислить $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)} dx}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}$.

№353. Доказать при всех $x \in \mathbb{R}$ тождество

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

№354. Пусть $T > 0$, $f \in C(\mathbb{R})$ и $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$ при всех $a \in \mathbb{R}$.

Доказать, что функция f периодическая с периодом T .

№355. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ – периодическая функция с периодом $T > 0$. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ была периодической с периодом T .

№356. Пусть $f \in C[a, b]$. Доказать, что существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.

№357. Пусть $f \in C[a, b]$. Доказать, что существует такая точка $c \in [a, b]$, что $\int_a^c f(t) dt = \int_c^b f(t) dt$.

Указание: рассмотреть функцию $F(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt$, $x \in [a, b]$.

№358. Пусть $f \in C[a, b]$ и $\int_a^b f(x) dx = 0$. Доказать, что существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\int_a^c f(t) dt = f(c)$.

Указание: рассмотреть функцию $F(x) = e^{-x} \int_a^x f(t) dt$.

№359. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ x^4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} dx$.

№360. Определим в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$ скалярное произведение как интеграл

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Найти $\langle x, \operatorname{tg}^2 x \rangle$ на сегменте $[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$.

8.8 Ответы и решения

274. Нет. Рассмотреть функцию

$$F(x) = \begin{cases} (x-a)^2 \cdot \sin \frac{1}{(x-a)^2}, & \text{если } a < x \leq b, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$$

Эта функция дифференцируема в каждой точке сегмента $[a, b]$, но её производная не интегрируема по Риману на $[a, b]$.

275. Нет. Рассмотреть $f(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$, $F(x)$ – канторова лестница.

276. Согласно свойству аддитивности, разобьём интеграл на два:

$$\begin{aligned} \int_0^2 |1-x|dx &= \int_0^1 |1-x|dx + \int_1^2 |1-x|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Можно было воспользоваться симметрией графика относительно прямой $x = 1$: $\int_0^2 |1-x|dx = 2 \int_0^1 |1-x|dx$.

277. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^4 - 1} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{x^4 - 1} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\ln \sqrt{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

278. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \left(\arcsin x + \sqrt{1-x^2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \end{aligned}$$

279. Имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2})^2}}{x^3} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx = \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \left(\ln |x| - \frac{1}{4x^4} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{2} + \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

280. Разделив многочлен в числителе на $x^2 + 2$ и выделив целую часть, получаем

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} dx &= \int_0^1 \left(x + 1 + \frac{1}{x^2 + 2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

281. Имеем

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (\sin 2x \sin 3x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left(\frac{1}{2} (\cos x - \cos 5x) \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{4} (\sin 6x - \sin 4x) \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \sin 6x + \sin 4x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 6x}{6} - \frac{\cos 4x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

282. Пользуясь основным гиперболическим тождеством $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, представим единицу в числителе дроби как гиперболическую единицу:

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} &= \int_1^3 \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} dx = \int_1^3 \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} - \int_1^3 \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \\ &= (-\operatorname{cth} x - \operatorname{th} x) \Big|_1^3 = -\operatorname{cth} 3 - \operatorname{th} 3 + \operatorname{cth} 1 + \operatorname{th} 1.\end{aligned}$$

283. Поскольку $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$, то получаем

$$\int_0^{0,1 \ln 2} (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^{10} dx = \int_0^{0,1 \ln 2} e^{10x} dx = \frac{e^{10x}}{10} \Big|_0^{0,1 \ln 2} = \frac{1}{10}.$$

284. Преобразуем подынтегральное выражение

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx &= \int_0^1 \frac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{(x^4 - x^2 + 1) + x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx = \int_0^1 \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx + \\ &+ \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} + \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^6 + 1} = \\ &= \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x^3) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

285. Во-первых, подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не ограничена на промежутке интегрирования (в окрестности точки $x = 0$ нарушается необходимое условие интегрируемости), т. е. эта функция не интегрируема на данном сегменте. Кроме того, функция $\ln|x|$, являющаяся первообразной для подынтегральной функции в интервалах её непрерывности, разрывна на промежутке интегрирования ($\ln|x|$ имеет разрыв 2 рода в точке $x = 0$). Формула Ньютона–Лейбница неприменима.

286. Подынтегральная функция имеет устранимые разрывы в точках $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, принадлежащих промежутку интегрирования. В этих точках функцию можно доопределить до непрерывной её предельным значением, равным 1, поэтому функция интегрируема на $[0, 2\pi]$. Однако первообразная функция $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$ имеет разрывы 1-го рода в указанных точках. Поэтому формулу Ньютона–Лейбница применять нельзя.

287. Первообразная функция $\operatorname{arctg}(1/x)$ (и подынтегральная функция тоже) имеют разрывы 1-го рода в точке $x = 0$. Формула Ньютона–Лейбница неприменима. Для вычисления интеграла следует найти обобщённую первообразную для подынтегральной функции, непрерывную на сегменте $[-1, 1]$.

288. Заметим, что функция $F(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ не является первообразной для подынтегральной функции на отрезке $[-1, 1]$, поскольку F разрывна в точке $x = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -0} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +0} F(x) = 0$). Поэтому вычисление данного интеграла по формуле Ньютона–Лейбница с использованием этой функции в качестве первообразной было бы неправомерным и привело бы к неверному результату. Однако, используя функцию F , можно найти первообразную на всём отрезке $[-1, 1]$. Для этого рассмотрим функцию

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \\ F(x) + 1, & \text{если } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

В отличие от F , она уже является непрерывной на $[-1, 1]$, причём $\bar{F}'(x) = F'(x)$ для любого $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, т. е. её производная совпадает с подынтегральной функцией. Поэтому по определению данная функция является первообразной (в обобщённом смысле) для подынтегральной функции на отрезке $[-1, 1]$. Теперь по формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right) dx = \bar{F}(1) - \bar{F}(-1) = \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - \frac{1}{1 + 0,5} = \frac{2}{3}.$$

289. Поскольку $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1; \\ -1, & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ 0, & \text{если } x = 0, x = 1, \end{cases}$ то $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx =$

$$\int_0^1 dx - \int_1^3 dx = 1 - 2 = -1.$$

290. Монотонная на $[0, 2]$ непрерывная функция $y = e^x$ принимает все промежуточные значения между 1 и e^2 ($7 < e^2 < 8$). Точки разрыва функции $[e^x]$ есть $x_k = \ln k$ ($k = \overline{2, 7}$), причём $[e^x] = k$, если $x \in [\ln k, \ln(k+1))$ ($k = \overline{1, 6}$). Таким образом, по свойству аддитивности имеем

$$\begin{aligned} \int_0^2 [e^x] dx &= \sum_{k=1}^6 \int_{\ln k}^{\ln(k+1)} k dx + \int_{\ln 7}^2 7 dx = \sum_{k=1}^6 k \ln \frac{k+1}{k} + 7(2 - \ln 7) = \\ &= \sum_{k=1}^6 \ln \left(\frac{k+1}{k} \right)^k + 14 - \ln(7^7) = \ln 2 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \left(\frac{5}{4} \right)^4 \left(\frac{6}{5} \right)^5 \left(\frac{7}{6} \right)^6 + 14 - \ln(7^7) = \\ &= \ln \frac{7^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \ln(7^7) + 14 = 14 - \ln(7!). \end{aligned}$$

291. Найдём точки разрыва подынтегральной функции: $x_k = k$, $k = 2, 3, \dots, n+1$. Поскольку $\ln[x] = \ln k$, если $x \in [k, k+1)$, $k = 1, 2, \dots, n$, то

$$\int_1^{n+1} \ln[x] dx = \sum_{k=1}^n \ln k \int_k^{k+1} dx = \sum_{k=1}^n \ln k = \ln(n!).$$

292. Разбивая область интегрирования на промежутки для раскрытия целой части над x , получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1 - [x]}{2x - [x] + 1} dx &= \int_0^1 \frac{1 - [x]}{2x - [x] + 1} dx + \int_1^2 \frac{1 - [x]}{2x - [x] + 1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{2x + 1} + \int_1^2 0 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(2x + 1)}{2x + 1} = \frac{1}{2} \ln |2x + 1| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

293. Выясним, на каких промежутках из указанного отрезка целая часть раскрывается однозначно: $n \leq 2x - 1 < n + 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} \leq x < \frac{n+2}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда, согласно свойству аддитивности, разобьём отрезок на части:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{[2x-1]}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{[2x-1]}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{[2x-1]}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{[2x-1]}{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{0}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \Big|_1^{\frac{3}{2}} - \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \\
&= \ln \left| \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right| - \ln |1+\sqrt{2}| - \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| = \\
&= \ln(3+\sqrt{13}) - \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(1+\sqrt{5}) = \ln \frac{3+\sqrt{13}}{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{5})}.
\end{aligned}$$

294. Так как

$$\int_1^{n+1} \ln[x] dx = \int_1^2 \ln 1 dx + \int_2^3 \ln 2 dx + \dots + \int_n^{n+1} \ln n dx = \ln(n!),$$

то $\exp \left(\int_1^{n+1} \ln[x] dx \right) = n!$, откуда $n = 2020$.

295. Положим $t = \sqrt{5-4x}$, тогда $x = \frac{1}{4}(5-t^2)$, $dx = -\frac{1}{2}t dt$ и получим

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}} = -\frac{1}{8} \int_3^1 (5-t^2) dt = \frac{1}{8} \left(5t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{6}.$$

296. Положим $t = \sqrt[3]{x-1}$, тогда $x = t^3 + 1$, $dx = 3t^2 dt$ и получаем

$$\int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_1^2 \frac{(t^3+1) \cdot 3t^2 dt}{t} = 3 \int_1^2 (t^3+1)t dt = \dots = 3 \cdot \frac{77}{10} = 23,1.$$

297. Сделаем тригонометрическую подстановку $x = a \sin t$, где $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \cdot \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \cdot a \cos t dt = \\
&= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \\
&= \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16}.
\end{aligned}$$

298. Сделаем замену $x = \sqrt{2} \sin t$, где $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, тогда приходим к интегралу

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sqrt{2} \sin t)^3 \sqrt{2} \cos t dt}{\sqrt{2-2\sin^2 t}} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t dt = \dots = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 1.$$

299. Положим $t = \sqrt{e^x - 1}$, тогда $e^x = t^2 + 1$, $x = \ln(t^2 + 1)$, и получаем

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{2t^2 dt}{t^2 + 1} = \int_0^1 \frac{2(t^2 + 1) - 2}{t^2 + 1} dt = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

300. Положим $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = 2t dt$ и получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int_0^1 \frac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}} \cdot 2t dt = 2 \int_0^1 \arcsin t d(\arcsin t) = \\ &= (\arcsin t)^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

301. а) Сделаем замену $t = \frac{\pi}{2} - x$, тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt.$$

б) Сделаем замену $t = \pi - x$, тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi x \cdot f(\sin x) dx = \int_\pi^0 (\pi - t) \cdot f(\sin t) (-dt) = \int_0^\pi \pi f(\sin t) dt - \\ &- \int_0^\pi t \cdot f(\sin t) dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - I, \text{ откуда } I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin t) dt. \end{aligned}$$

302. Интеграл имеет вид $\int_0^\pi x f(\sin x) dx$, где $f(\sin x) = \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}$, поэтому можно применить результат задачи [8, № 2257(6)]: $\int_0^\pi x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = \\ &= -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos x) \Big|_0^\pi = -\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

303. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + x + 1} &= \int_{-1}^1 \frac{x dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \int_{-1}^1 \frac{(x + \frac{1}{2}) d(x + \frac{1}{2})}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d(x + \frac{1}{2})}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right) \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \Big|_{-1}^1 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

304. а) Так как $x \neq 0$ на промежутке интегрирования, то для подынтегрального выражения имеем $\frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx = \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx &= \int_1^2 \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{arctg} \frac{3}{2\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

б) Проверим, будет ли функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$ первообразной для подынтегральной функции на отрезке $[-1, 1]$. Так как $\lim_{x \rightarrow -0} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, а $\lim_{x \rightarrow +0} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, то видим, что в точке $x = 0$ эта функция терпит разрыв 1-го рода и поэтому не может быть первообразной. Однако непрерывная функция

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} F(x), & x \in [-1, 0]; \\ F(x) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

является одной из первообразных для подынтегральной функции на $[-1, 1]$ (в обобщённом смысле). Тогда по формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \bar{F}(1) - \bar{F}(-1) = \left(0 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

305. Положим $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = 2t dt$ и приходим к интегралу

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t}{1+t^2} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(t^2+1)+t-1}{t^2+1} dt = \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{3}} dt + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = 2\sqrt{3} - 2 + \ln 2 - \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

306. Положим $t = \sqrt[4]{x}$, тогда $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$ и приходим к интегралу

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \int_1^2 \frac{4t^3 dt}{t^2 + t} = 4 \int_1^2 \frac{t^2 dt}{t+1} = 4 \int_1^2 \frac{(t^2-1)+1}{t+1} dt = \dots = 4 \ln \frac{3}{2} + 8.$$

307. Положим $x = 2 \operatorname{tg} t$, тогда получим

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \, dt = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

308. Перепишем интеграл в виде $\int_1^8 x^{-7/5} (1+x^{1/3})^{1/5} dx$. Подынтегральное выражение имеет вид $\int_1^8 x^m (1+x^n)^p dx$ при $m = -\frac{7}{5}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{5}$, $\frac{m+1}{n} + p = -1$. В этом случае рекомендуемая подстановка $z = \sqrt[5]{x^{-1/3} + 1}$. С учётом $x = (z^5 - 1)^{-3}$, $dx = -3(z^5 - 1)^{-4} 5z^4 dz$, получаем

$$\begin{aligned} \int_1^8 x^{-7/5} (1+x^{1/3})^{1/5} dx &= \int_{z(1)}^{z(8)} (z^5 - 1)^{21/5} (1 + (z^5 - 1)^{-1})^{1/5} \cdot \frac{(-15)z^4}{(z^5 - 1)^4} dz = \\ &= -15 \int_{z(1)}^{z(8)} z^5 dz = -\frac{15}{6} z^6 \Big|_{z(1)}^{z(8)} = -\frac{5}{2} (x^{-1/3} + 1)^{6/5} \Big|_1^8 = \\ &= -\frac{5}{2} \left(\frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} \right)^{6/5} \Big|_1^8 = -\frac{5}{2} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{6/5} - 2^{6/5} \right). \end{aligned}$$

309. Имеем $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x) dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\sin x)}{\sin x} d(\sin x) =$

$$\begin{aligned} &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \ln(\sin x) d(\ln(\sin x)) = \frac{1}{2} \ln^2(\sin x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{2} \left(\ln^2(\sin \frac{\pi}{3}) - \ln^2(\sin \frac{\pi}{4}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln^2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

310. Положим $z = \frac{1}{x-2}$, тогда

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt{x^2 - 10x + 13}} = - \int_{-\frac{1}{3}}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z^2} - \frac{6}{z} - 3}} = - \int_{-\frac{1}{3}}^{-1} \frac{|z| dz}{\sqrt{1 - 6z - 3z^2}}.$$

Поскольку на промежутке интегрирования $x < 2$, т. е. $z < 0$, то $|z| = -z$. Тогда искомый интеграл равен

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{3}}^{-1} \frac{z dz}{\sqrt{1 - 6z - 3z^2}} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} \frac{(z+1) dz}{\sqrt{\frac{4}{3} - (z+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{4}{3} - (z+1)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{3} - 2z - z^2} \Big|_{-1}^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{(z+1)\sqrt{3}}{2} \Big|_{-1}^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right). \end{aligned}$$

311. Найдём неопределённый интеграл, полагая $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \cos x} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

Если формально сделать универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ в определённом интеграле, то, т. к. $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} \pi = 0$, получим $\int_0^0 \frac{dt}{2+t^2} = 0$, с другой стороны, $\frac{1}{3 + \cos x} \geq \frac{1}{4}$, и, следовательно, $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} \geq 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$. Причина в том, что замена сделана неправильно, т. к. нарушено условие непрерывности функции $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ на $[0, 2\pi]$. Функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}$ не является первообразной функции $f = \frac{1}{3 + \cos x}$ на $[0, 2\pi]$, поскольку $F \notin C[0, 2\pi]$.

1-й способ. Чтобы получить первообразную для f на $[0, 2\pi]$, заметим, что функция

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}, & 0 \leq x < \pi; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C, & \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$$

имеет производную, равную f , для всех $x \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$. Функция $G(x)$ – первообразная функции f на $[0, 2\pi]$, если она непрерывна в точке $x = \pi$. Для этого постоянная C должна удовлетворять соотношению

$$\lim_{x \rightarrow \pi-} G(x) = \lim_{x \rightarrow \pi+} G(x), \quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C,$$

откуда $C = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Теперь, применяя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} = G(2\pi) - G(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 0}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2-й способ. Более простым и общим является следующий метод вычисления этого интеграла. Функция

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}, & 0 \leq x < \pi; \\ \lim_{x \rightarrow \pi-} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \pi, \end{cases}$$

есть первообразная функции f на сегменте $[0, \pi]$, а функция

$$F_2(x) = \begin{cases} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}, & \pi < x \leq 2\pi; \\ \lim_{x \rightarrow \pi+} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \pi, \end{cases}$$

есть первообразная функции f на сегменте $[\pi, 2\pi]$. Используя свойство аддитивности и формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} = F_1(\pi) - F_1(0) + F_2(2\pi) - F_2(\pi) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi-} F(x) - F(0) + F(2\pi) - \lim_{x \rightarrow \pi+} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

312. Вычислим вначале неопределённый интеграл, чтобы найти одну из первообразных и воспользоваться формулой Ньютона–Лейбница:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} &= \left| z = e^t \right| = \int \frac{dz}{z\sqrt{z-1}} = \left| u = \sqrt{z-1} \right| = 2 \int \frac{du}{1+u^2} = \\ &= 2 \operatorname{arctg} u + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^t - 1} + C. \end{aligned}$$

Тогда перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} \Big|_{\ln 2}^x &= \frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} &= \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{e^x - 1} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 4. \end{aligned}$$

313. а) Верно. Действительно, достаточно сделать в интеграле замену по формуле $x = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{6}]$. б) Неверно, т. к. образом отрезка $[0, \frac{5\pi}{6}]$ при отображении $x = \sin t$ будет отрезок $[0, 1]$, на котором f не интегрируема.

314. По формуле интегрирования по частям имеем:

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx = -e^{-x} x \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = -e^{-\ln 2} \ln 2 - e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}.$$

315. Полагая $u = x$, $dv = \sin 2x dx \Rightarrow u' = 1$, $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$, имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{\pi}{4}.$$

316. Положим $u = 2x + 5$, $dv = \sin 4x dx$, тогда $du = 2dx$, $v = -\frac{1}{4} \cos 4x$ и проинтегрируем по частям:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x + 5) \sin 4x dx = -(2x + 5) \frac{1}{4} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{4} \cos 4x \right) 2dx = \dots = \frac{\pi}{8} + \frac{5}{2}.$$

317. Имеем: $|\ln x| = \begin{cases} -\ln x, & x \in [\frac{1}{e}, 1]; \\ \ln x, & x \in [1, e]. \end{cases}$ Применяя свойство аддитивности для раскрытия модуля и интегрируя по частям, получаем

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx = (-x \ln x + x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + (x \ln x - x) \Big|_1^e = 2(1 - e^{-1}).$$

318. Положим $u = \ln x$, $dv = (x^2 + 1)dx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^3}{3} + x$ и, интегрируя по частям, получаем

$$\int_1^e (x^2 + 1) \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \frac{dx}{x} = \dots = \frac{2e^2 + 10}{9}.$$

319. Применим формулу интегрирования по частям

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = - \int_0^\pi x \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = - \int_0^\pi x d(\arctg(\cos x)) = \\ &= -x \arctg(\cos x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \arctg(\cos x) dx = \frac{\pi^2}{4} + I_1, \end{aligned}$$

где $I_1 = \int_0^\pi \arctg(\cos x) dx$. Чтобы найти I_1 , заметим, что график функции $\arctg(\cos x)$ центрально симметричен относительно точки $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Поэтому интегралы от этой функции по отрезкам $[0, \frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ равны по модулю и противоположны по знаку, а значит, в сумме равны нулю, т. е. $I_1 = 0$ и $I = \pi^2/4$.

320. Интегрируем по частям ($dv = dx$, $u = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}$):

$$\begin{aligned} I &= x \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \int_0^3 \frac{(\sqrt{x})^2 d(\sqrt{x})}{1 + (\sqrt{x})^2} = \\ &= \pi - \int_0^3 \frac{(1 + (\sqrt{x})^2 - 1) d(\sqrt{x})}{1 + (\sqrt{x})^2} = \pi - \sqrt{x} \Big|_0^3 + \arctg \sqrt{x} \Big|_0^3 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

321. Имеем

$$I = \int_0^\pi e^x \cos^2 x dx = \int_0^\pi e^x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi e^x dx + \int_0^\pi e^x \cos 2x dx \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \quad \text{где } I_1 = e^\pi - 1, \quad I_2 = e^x \cos 2x \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi e^x \sin 2x dx = \\
&= e^x \cos 2x \Big|_0^\pi + 2 \left(e^x \sin 2x - 2 \int_0^\pi e^x \cos 2x dx \right) = e^x \cos 2x \Big|_0^\pi + 2(e^x \sin 2x - 2I_2), \\
&\text{откуда } I_2 = \frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x) \Big|_0^\pi = \frac{1}{5} (e^\pi - 1). \text{ Тогда}
\end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2} (e^\pi - 1 + \frac{1}{5} (e^\pi - 1)) = \frac{3}{5} (e^\pi - 1).$$

322. Функция интегрируема по Риману, т. к. её можно доопределить до непрерывной на отрезке $[0, 1]$, полагая в точке $x = 0$ значение равным нулю (пределу). Вычислим неопределённый интеграл. Сделаем подстановку $t = \ln x$, тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$. Полагая затем $u = e^{2t}$, $v' = \sin t$ и интегрируя по частям два раза, получаем:

$$\begin{aligned}
I &= \int x \sin(\ln x) dx = \int e^{2t} \sin t dt = e^{2t} (-\cos t) - \int (-\cos t) \cdot 2e^{2t} dt = \\
&= -e^{2t} \cos t + 2 \int \cos t \cdot e^{2t} dt = -e^{2t} \cos t + 2 \left(e^{2t} \sin t - 2 \int e^{2t} \sin t dt \right) = \\
&= e^{2t} (2 \sin t - \cos t) - 4I, \quad \text{откуда } I = \frac{1}{5} e^{2t} (2 \sin t - \cos t) + C.
\end{aligned}$$

Итак, $F(x) = \frac{1}{5} e^{2 \ln x} (2 \sin \ln x - \cos \ln x)$. Заметим, что $F(1) = -\frac{1}{5}$, а в точке $x = 0$ функцию $F(x)$ можно доопределить до непрерывной справа, положив $F(0) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{2 \ln x} (2 \sin \ln x - \cos \ln x) = 0$, тогда $\int_0^1 x \sin(\ln x) dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{5}$.

323. Интегрируем по частям, положив $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x dx$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx = \\
&= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot (n-1) \sin^{n-2} x dx = \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу понижения: $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$.

При $n = 0$ имеем $I_0 = \frac{\pi}{2}$,

при $n = 2$ имеем $I_2 = \frac{1}{2} \cdot I_0$,

при $n = 4$ имеем $I_4 = \frac{3}{4} \cdot I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$,

при $n = 6$ имеем $I_6 = \frac{5}{6} \cdot I_4 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$,

.....
при $n = 2k$: $I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2k(2k-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \cdot I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$.

При $n = 1$ имеем $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$,

при $n = 3$ имеем $I_3 = \frac{2}{3} \cdot I_1$,

при $n = 5$ имеем $I_5 = \frac{4}{5} \cdot I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1$,

.....
при $n = 2k + 1$: $I_{2k+1} = \frac{(2k)(2k-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1} \cdot I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$.

324. Обозначим выражение под знаком предела $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sin \frac{\pi i}{n}$, тогда S_n можно интерпретировать как интегральную сумму для функции $f(x) = \sin(\pi x)$ на отрезке $[0, 1]$ при разбиении его на n равных частей, и её предел равен интегралу

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} (\cos \pi x) \Big|_1^0 = \frac{2}{\pi}.$$

325. Перепишем x_n в виде $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^p$ и заметим, что это интегральная сумма для функции $f(x) = x^p$ на отрезке $[0, 1]$ при разбиении его на n равных частей. Таким образом, переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$ получаем определённый интеграл

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

326. а) $-e^{-a^2}$; б) 0 ; в) e^{-b^2} .

327. а) $2b \ln(1 + b^4)$; б) $-\sin a \cdot \ln(1 + \cos^2 a) - \cos a \cdot \ln(1 + \sin^2 a)$.

328. По формуле Ньютона–Лейбница $\Phi(x) = F(\ln^2 x) - F(\ln x)$, значит

$$\Phi'(x) = (F(\ln^2 x) - F(\ln x))' = F'(\ln^2 x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - F'(\ln x) \cdot \frac{1}{x}.$$

Величины $F'(\ln^2 x)$ и $F'(\ln x)$ есть значения подынтегральной функции e^{-t^2} , взятые в точках $t = \ln^2 x$ и $t = \ln x$ ($x > 0$), поэтому

$$\Phi'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \cdot e^{-\ln^4 x} - \frac{1}{x} \cdot e^{-\ln^2 x}.$$

329. Обозначим через $F(t)$ первообразную для $f(t) = \frac{1}{\ln^3 2t}$ ($t > 0$), тогда

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{-\frac{x}{3}} \frac{dt}{\ln^3 2t} = \frac{d}{dx} \left(F\left(-\frac{x}{3}\right) - F(x^2) \right) = \frac{1}{\ln^3(-\frac{2x}{3})} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\ln^3(2x^2)} \cdot 2x.$$

330. Найдём $F'(x) = \left(\int_{-x}^4 \frac{e^t - 1}{|t|} dt \right)' = (\Phi(4) - \Phi(-x))' = \frac{e^{-x} - 1}{|x|}$. Воспользуемся утверждением: если функция $F(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ справа (слева), производная $F'(x)$ существует в некоторой правой (левой) полукрестности x_0 и существует $\lim_{x \rightarrow x_0+0} F'(x)$ (соответственно, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} F'(x)$), то этот предел равен $F'_+(x_0)$ (соответственно, $F'_-(x_0)$). Так как функция $F(x)$ удовлетворяет данному утверждению, то найдём односторонние производные:

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-x} - 1}{|x|} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -1,$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^{-x} - 1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1.$$

331. Сделаем замену $z = t + x$, тогда $g(x) = \int_{a+x}^{b+x} f(z) dz$, поэтому

$$g'(x) = \left(\int_0^{b+x} f(z) dz - \int_0^{a+x} f(z) dz \right)'_x = f(b+x) - f(a+x).$$

332. По формуле Ньютона–Лейбница $y(x) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^x \frac{\operatorname{tg} t}{t} dt = F(x) - F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Найдём производную: $y'(x) = F'(x) - F'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ и приравняем к нулю: $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 0$. Из совокупности критических точек $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, отберём принадлежащие интервалу $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$. Получим единственную критическую точку $x = \pi$. Заметим, что производная левее этой точки отрицательна, а правее положительна. Следовательно, в точке $x = \pi$ достигается локальный минимум, равный $y(\pi) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{\operatorname{tg} t}{t} dt$.

333. Найдём стационарные точки: $F'(x) = e^{x^2}(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ и $x = 2$. С учётом знака производной устанавливаем, что в точке $x = 1$ функция имеет локальный максимум, а в точке $x = 2$ — локальный минимум.

334. Правая, а значит и левая, части данного равенства при $x \geq 0$ принимают значения от 0 до 1, поэтому можно применить функцию арксинус, затем воспользоваться тождеством $\arcsin(\sin x) = x$ ($x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) и продифференцировать по x :

$$\arcsin \left(\sin \left(\int_0^x f(u) du \right) \right) = \arcsin \frac{x}{1+x},$$

$$\int_0^x f(u)du = \arcsin \frac{x}{1+x} \Rightarrow \left(\int_0^x f(u)du \right)'_x = \left(\arcsin \frac{x}{1+x} \right)'_x,$$

$$\text{откуда находим } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x}}.$$

335. Имеем неопределённости вида $\frac{0}{0}$. Интеграл с переменным верхним пределом $\int_0^x \cos(t^2)dt$ есть первообразная непрерывной функции $\cos(x^2)$, т. е. $\left(\int_0^x \cos(t^2)dt \right)'_x = \cos(x^2)$. Поэтому, применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{1} = 1.$$

Отметим, что первообразная для $\cos(x^2)$ не является элементарной функцией, т. е. интеграл $\int_0^x \cos(t^2)dt$ не выражается через элементарные функции. Это, однако, не помешало вычислению искомого предела.

336. Используя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\frac{d}{dx} \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

337. Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$, для её раскрытия применим правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt \right)'_x}{\left(\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt \right)'_x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}}{\frac{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}}{\cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg} x)}} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}} = 1. \end{aligned}$$

338. 1-й способ. Обозначим $f(t) = \cos(\pi t^2)$, $F(t)$ – какая-либо первообразная для $f(t)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(\sin x)} \int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \cos(\pi t^2) dt &= \frac{d(F(\cos^2 x) - F(\sin^2 x))}{d(\sin x)} = \\ &= \frac{(-2 \cos x \sin x \cdot F'(\cos^2 x) - 2 \sin x \cos x \cdot F'(\sin^2 x)) dx}{\cos x dx} = \\ &= -2 \sin x (f(\cos^2 x) + f(\sin^2 x)) = -2 \sin x (\cos(\pi \cos^4 x) + \cos(\pi \sin^4 x)). \end{aligned}$$

2-й способ. Принимая во внимание $d(\sin x) = \cos x dx$ и полагая в формуле Лейбница $f(t, x) = \cos(\pi t^2)$, перепишем интеграл в виде

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx} \int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} f(t, x) dt = \frac{1}{\cos x} \cdot I,$$

$$\begin{aligned}
I &= f(\cos^2 x, x) \cdot \frac{d(\cos^2 x)}{dx} - f(\sin^2 x, x) \cdot \frac{d(\sin^2 x)}{dx} + \int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt = \\
&= \cos(\pi(\cos^2 x)^2) \cdot (-\sin 2x) - \cos(\pi(\sin^2 x)^2) \cdot \sin 2x + 0 = \\
&= -\sin 2x (\cos(\pi \cos^4 x) + \cos(\pi \sin^4 x)).
\end{aligned}$$

Итак, данное выражение равно

$$-\frac{1}{\cos x} \cdot \sin 2x (\cos(\pi \cos^4 x) + \cos(\pi \sin^4 x)) = -2 \sin x \cdot (\cos(\pi \cos^4 x) + \cos(\pi \sin^4 x)).$$

339. Вспомним, что $\frac{d^2 y}{dx^2} = y''$, и воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2} \left(\int_1^{x^2} \sin 10t dt \right) &= \frac{d^2}{dx^2} (F(x^2) - F(1)) = \frac{d}{dx} (F'(x^2) \cdot 2x) = \frac{d}{dx} (\sin(10x^2) \cdot 2x) \\
&= 2(20x^2 \cos 10x^2 + \sin 10x^2).
\end{aligned}$$

340. Известно, что в любой точке непрерывности $t = p$ подынтегральной функции $f(t)$ у функции $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ существует производная, причём $F'(p) = f(p)$. Однако в данном случае функция $f(t)$ имеет в нуле устранимый разрыв, поэтому мы не можем воспользоваться этим утверждением и считать, что $F'(0) = f(0)$ (производная непрерывной в точке функции F не может иметь в ней устранимый разрыв). Найдём производную $F'(x)$ в точке $x = 0$ по определению:

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-1}^x f(t)dt - \int_{-1}^0 f(t)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}.$$

Заметим, что числитель дроби, как и знаменатель, стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$. Применяя 1-е правило Лопиталья, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x f(t)dt)'_x}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} = 1.$$

Ответ: производная $F'(0)$ существует и равна 1.

341. Указание: исследовать функцию с помощью производной. Ответ: $\min_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = f(-\frac{1}{2}) \approx -0.11$, $\max_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = f(1) \approx 1.66$.

342. Перепишем равенство в виде $\int_a^b (x - [x])dx = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \{x\} dx = 0$. Подынтегральная функция неотрицательна, причём обращается в нуль в отдельных точках $x \in \mathbb{Z}$. На любом конечном сегменте $[a, b]$ их конечное число. Если их

отбросить (значение интеграла при этом не изменится), то в остальных точках сегмента $[a, b]$ функция будет строго положительна. Такой интеграл может быть равен нулю только в случае $a = b$.

343. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx &= \int_0^{100\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \int_0^{100\pi} \sqrt{2} \cdot |\sin x| dx = \\ &= \sqrt{2} \left(\int_0^\pi |\sin x| dx + \int_\pi^{2\pi} |\sin x| dx + \dots + \int_{99\pi}^{100\pi} |\sin x| dx \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \int_0^\pi |\sin x| dx = 100\sqrt{2} \int_0^\pi \sin x dx = 200\sqrt{2}. \end{aligned}$$

344. Множество E является объединением отрезков $[0, \pi]$ и $[2\pi, 3\pi]$. Принимая во внимание знак $\cos x$, представим интеграл на множестве E как сумму интегралов по отрезкам $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[2\pi, \frac{5\pi}{2}]$, $[\frac{5\pi}{2}, 3\pi]$, внутри каждого из которых знак $\cos x$ постоянен:

$$\begin{aligned} \int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sqrt{\sin x} d(\sin x) + \\ &+ \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \sqrt{\sin x} d(\sin x) - \int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} \sqrt{\sin x} d(\sin x) = \\ &= \frac{2}{3} \left(\sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi + \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} - \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} \right) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

345. Так как промежуток интегрирования симметричен относительно точки $x = 0$, а подынтегральная функция нечётная, то $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^2} \cdot \sin^5 x dx = 0$.

346. 1-й способ (вычисление интеграла). Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^5 x dx &= \int_0^\pi \cos^4 x d(\sin x) = \int_0^\pi (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \\ &= \int_0^\pi (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) = \left(\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} \right) \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

2-й способ (использование симметрии графика). Так как график подынтегральной функции имеет центр симметрии в точке $(\frac{\pi}{2}, 0)$, то это означает равенство данного интеграла нулю.

347. Интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция нечётная (как сумма нечётных функций), а промежуток интегрирования симметричен относительно точки $x = 0$.

348. Заметим, что функция $\sin^3 x$ является периодической с периодом 2π , причём интеграл от неё по любому отрезку длины 2π равен нулю. Аналогично для функции $(-3 \sin 2x)$ равняется нулю интеграл по любому отрезку длины π . Отсюда получаем

$$\int_1^{2\pi+1} (x + \sin^3 x - 3 \sin 2x) dx = \int_1^{2\pi+1} x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^{2\pi+1} = \frac{1}{2} ((2\pi+1)^2 - 1) = 2\pi(\pi+1).$$

$$\begin{aligned} \textbf{349.} \text{ Положим } y = x - \pi, \text{ тогда } \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin(\pi + y) + 2020(\pi + y)) dy = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin y + 2020\pi + 2020y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2020y - \sin y) dy = 0 \end{aligned}$$

как интеграл от нечётной функции по симметричному относительно 0 отрезку.

350. Заметим, что $(x \sin x)' = x \cos x + \sin x$, поэтому

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(x \sin x)}{(x \sin x)^2} = -\frac{1}{x \sin x} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot (2\sqrt{2} - 1).$$

351. Сначала вычислим интеграл под знаком предела и лишь затем перейдём к пределу при $A \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{2A} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \Big|_A^{2A} = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\ln \left| 2A + \sqrt{1+4A^2} \right| - \ln \left| A + \sqrt{1+A^2} \right| \right) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{2A + \sqrt{1+4A^2}}{A + \sqrt{1+A^2}} \right| = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{\frac{1}{A^2} + 4}}{1 + \sqrt{\frac{1}{A^2} + 1}} \right| = \ln 2. \end{aligned}$$

352. Положим $t = 6 - x$:

$$\begin{aligned} I &= \int_4^2 \frac{\sqrt{\ln(3+t)} d(-t)}{\sqrt{\ln(3+t)} + \sqrt{\ln(9-t)}} = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(3+t)} dt}{\sqrt{\ln(3+t)} + \sqrt{\ln(9-t)}} = \\ &= \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(3+x)} dx}{\sqrt{\ln(3+x)} + \sqrt{\ln(9-x)}}. \end{aligned}$$

Сложим полученный интеграл с исходным:

$$2I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)} dx}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} + \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(3+x)} dx}{\sqrt{\ln(3+x)} + \sqrt{\ln(9-x)}} =$$

$$= \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(3+x)}}{\sqrt{\ln(3+x)} + \sqrt{\ln(9-x)}} dx = \int_2^4 dx = 2,$$

следовательно, исходный интеграл равен 1.

353. *Указание:* показать, что производная у функции, стоящей в левой части равенства, тождественно равна нулю, и сделать вывод, что эта функция постоянна. Затем найти её значение в любой точке.

354. Пусть $\varphi(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx - \int_0^T f(x)dx$. Тогда по условию $\varphi(a) \equiv 0$ и, следовательно, $\varphi'(a) = f(a+T) - f(a) \equiv 0$, откуда следует периодичность функции.

355. Условие имеет вид: $\int_0^T f(t)dt = 0$. В самом деле, запишем условие периодичности функции $F(x)$: при всех $x \in \mathbb{R}$ должно выполняться тождество

$$\begin{aligned} F(x+T) \equiv F(x) &\Leftrightarrow \int_0^{x+T} f(t)dt \equiv \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow \int_0^{x+T} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt \equiv 0 \Leftrightarrow \\ &\int_x^{x+T} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^T f(t)dt = 0. \end{aligned}$$

356. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Тогда, применяя к этой функции теорему Лагранжа на сегменте $[a, b]$, получаем, что найдётся точка $c \in (a, b)$:

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) \Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a).$$

357. Рассмотрим функцию $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt$. Она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков. По свойству непрерывной функции между точками a и b найдётся такая точка c , в которой $F(c) = 0$.

358. Рассмотрим функцию $F(x) = e^{-x} \int_a^x f(t)dt$. Она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка равные нулю значения. Поэтому по теореме Ролля на интервале (a, b) найдётся такая точка c , что $F'(x) = -e^{-x} \int_a^x f(t)dt + e^{-x} f(x)$ в этой точке равна нулю:

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow -e^{-c} \int_a^c f(t)dt + e^{-c} f(c) = 0 \Leftrightarrow \int_a^c f(t)dt = f(c).$$

359. Раскрывая определитель, получаем $\int_{-1}^1 (2x^5)dx = 0$.

360. Задача сводится к вычислению интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx$. Интегрируем по частям: $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \operatorname{tg}^2 x dx \Rightarrow v = \int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C$ (берём

простейшую первообразную $v = \operatorname{tg} x - x$). Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx &= (x(\operatorname{tg} x - x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x - x) dx = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \\ &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

9 СЕМИНАР: Оценки интегралов. Теоремы о среднем

«Когда мне исполнилось 23 года, у меня уже было больше миллиона долларов, в 24 года — больше 10 миллионов, а в 25 лет — больше 100 миллионов.

И всё это не имеет никакого значения, потому что я никогда ничего не делал просто ради денег».

Стивен Пол (Стив) Джобс (1955–2011) – американский предприниматель, изобретатель и промышленный дизайнер. Один из основателей Apple.

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

В отличие от неопределённых интегралов, представляющих собой классы функций, отличающихся между собой на произвольную константу, определённые интегралы Римана суть действительные числа и их можно сравнивать между собой так же, как мы сравниваем действительные числа.

Во многих задачах требуется не вычисляя интеграла (это может оказаться затруднительно или невозможно) оценить его примерное значение. Например, используя оценки для подынтегральной функции или другим способом. Если свойство подынтегральной функции описывается некоторым неравенством, то оно порождает, вообще говоря, соответствующее свойство интеграла, также описываемое неравенством. И это неудивительно: неравенства, полученные первоначально для сумм, обобщаются на случай интегралов.

В данном разделе рассматриваются теоремы о среднем, различные интегральные неравенства, позволяющие, избегая непосредственного вычисления интеграла, получать необходимые оценки его значения.

9.1 Свойства определённого интеграла, связанные с неравенствами. Известные интегральные неравенства

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на сегменте $[a, b]$ ($a < b$). Имеют место следующие свойства операции интегрирования (интегралов).

1. (Сохранение знака). Если $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
2. (Монотонность). Если $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

3. Если $f(x) \in C[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a, b]$. Пусть, кроме того, существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) > 0$. Тогда $\int_a^b f(x)dx > 0$.

4. Если $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a, b]$ и $\int_a^b f(x)dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$.

5. Если функция $f(x)$ такова, что $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, то для любого сегмента $[c, d] \subseteq [a, b]$ имеем $\int_c^d f(x)dx = 0$.

6. Если $f(x) \in C[a, b]$ и $\int_c^d f(x)dx = 0$ для любого сегмента $[c, d] \subseteq [a, b]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

7. Если функция $f(x)$ такова, что $\int_a^b f(x)dx > 0$, то существует подсегмент $[c, d] \subseteq [a, b]$, на котором $f(x) > 0$.

8. Если функция $f(x) \geq 0$ на сегменте $[a, b]$, то условие $\int_a^b f(x)dx > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда множество нулей функции f не является всюду плотным на $[a, b]$.¹

9. Модуль интегрируемой по Риману на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ также интегрируем на этом сегменте, причём²

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Подчеркнём, что из интегрируемости по Риману модуля функции $|f|$ не следует, вообще говоря, интегрируемости самой функции f .

Пример 136. Функция типа Дирихле

$$\begin{cases} 1, & x - \text{рационально;} \\ -1, & x - \text{иррационально;} \end{cases}$$

не интегрируема по Риману ни на каком отрезке, но её модуль – интегрируем. $\square$

¹Множество называется *всюду плотным* на заданном сегменте, если в любой сколь угодно малой окрестности каждой точки сегмента содержится бесконечно много элементов этого множества.

²Данное неравенство является обобщением на интегралы известного неравенства (модуль суммы не больше суммы модулей): $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

10. Неравенство Коши–Буняковского (интегральная форма). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, то справедливо неравенство

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

В случае, когда функции f и g непрерывны на $[a, b]$, неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда эти функции линейно зависимы.¹

11. Неравенство Коши:

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

12. Неравенство Гёльдера.² Если $p > 1$ и $q > 1$ – два действительных числа, таких что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

В случае $p = q = 2$ из неравенства Гёльдера получаем неравенство Коши–Буняковского.

13. Неравенство Минковского.³ Если $f(x)$ и $g(x)$ – интегрируемые на сегменте $[a, b]$ функции и $p \geq 1$, то справедливо неравенство

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $p = 2$ из неравенства Минковского получаем неравенство Коши.

14. Неравенство Чебышёва.⁴ Если функция $f(x)$ возрастает, а функция $g(x)$ убывает на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

15. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ (выпукла вниз), то

¹Функции f и g называются *линейно зависимыми* на $[a, b]$, если существуют такие $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $\forall x \in [a, b]$ справедливо $\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) = 0$.

²Людвиг Отто Гёльдер (1859–1937) – немецкий математик.

³Герман Минковский (1864–1909) – немецкий математик и физик.

⁴Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894) – российский математик и механик.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Если же $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ (выпукла вверх), то

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

Каков геометрический смысл этих неравенств?

9.2 Оценивание интеграла через нахождение точных границ (оценок) подынтегральной функции. Среднее значение интегрируемой функции

«Студентов, ранее изучавших Бейсик, практически невозможно обучить хорошему программированию. Как потенциальные программисты они подверглись необратимой умственной деградации».

Эдсгер Виле Дейкстра (1930–2002) – нидерландский учёный, труды которого оказали влияние на развитие информатики и информационных технологий; один из разработчиков концепции структурного программирования, исследователь формальной верификации и распределённых вычислений. Тьюринговский лауреат.

Предположим, необходимо оценить (в виде двойного неравенства) значение некоторого интеграла. Одна из возможностей сделать это – найти наименьшее и наибольшее значения (точные грани) подынтегральной функции и построить оценки снизу и сверху, соответственно, как интегралы от них.

В самом деле, если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, и потому всегда существуют m и M – точные нижняя и верхняя грани её значений на $[a, b]$ (а если функция $f(x)$ к тому же непрерывна на $[a, b]$, то m и M – её наименьшее и наибольшее значения на нём). Выражения $m(b-a)$ и $M(b-a)$ являются нижней и верхней суммами Дарбу, соответствующими разбиению отрезка $[a, b]$, состоящему лишь из одной части – самого отрезка. Но $\int_a^b f(x)dx$ разделяет суммы Дарбу, и поэтому

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \quad (1)$$

Геометрический смысл этого неравенства: площадь криволинейной трапеции больше площади прямоугольника с тем же основанием и высотой m , но меньше площади прямоугольника с тем же основанием и высотой M . Такой же

результат мы бы получили при формальном интегрировании неравенства $m \leq f(x) \leq M$:

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a).$$

Пример 137. Оценить интеграл $\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2} dx$. Найти абсолютную и относительную погрешности приближения.

Решение. Методами дифференциального исчисления находим наибольшее и наименьшее значения функции: $m = 0,5$ и $M = 0,6$. Тогда по формуле (1) имеем

$$1 = 0,5(2-0) < \int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2} dx < 0,6(2-0) = 1,2.$$

Если взять в качестве приближённого значения интеграла среднее арифметическое оценок снизу и сверху $\frac{1,2+1}{2} = 1,1$, то абсолютная погрешность равна $\frac{1,2-1}{2} = 0,1$, а относительная погрешность (в процентах) равна $\frac{0,1}{1,1} \cdot 100 \approx 9\%$. $\square$

В силу двойного неравенства (1) число

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

заключено между значениями m и M . Это число называют *средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$* :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдётся такое число $\xi \in [a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi).$$

Если функция $f(x)$ разрывна на отрезке $[a, b]$, то такой точки ξ может и не существовать.

9.3 Доказательство неравенств интегрированием

Многие неравенства между функциями получаются интегрированием (с переменным пределом) других функциональных неравенств.

Пример 138. Доказать неравенство

$$\ln(2 \sin x) > \frac{1}{2}(\pi - x)x - \frac{5}{72}\pi^2 \quad \text{при } x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. Воспользуемся неравенством $\operatorname{ctg} x > \frac{\pi}{2} - x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), справедливость которого следует из известного неравенства $\operatorname{tg} \alpha > \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) с заменой α на $\frac{\pi}{2} - x$. Проинтегрировав неравенство в пределах от $\frac{\pi}{6}$ до x , получим

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^x \operatorname{ctg} t dt > \int_{\frac{\pi}{6}}^x \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \frac{1}{2}(\pi - x)x - \frac{5}{72}\pi^2,$$

причём

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^x \operatorname{ctg} t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^x \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^x \frac{d(\sin t)}{\sin t} = \ln(\sin t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^x = \ln(2 \sin x),$$

откуда и получаем требуемое неравенство. $\square$

9.4 Теоремы о среднем значении

Президент России Владимир Путин 21 февраля 2023 года в ходе послания Федеральному собранию предложил вернуть специалитет в вузы. «Необходим синтез всего лучшего, что было в советской системе образования и опыта последних десятилетий. В этой связи предлагается следующее: вернуться к традиционной базовой подготовке специалистов с высшим образованием, срок обучения может составить от четырёх до шести лет», — сказал В. Путин.

Одним из известных способов получения оценок интегралов является использование так называемых теорем о среднем значении.

Теорема 1 (1-я теорема о среднем). Если: 1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы по Риману на сегменте $[a, b]$; 2) функция $\varphi(x)$ не меняет знака при $x \in (a, b)$, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu \int_a^b \varphi(x)dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$;

3) если, сверх того, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\mu = f(\xi)$, где $a \leq \xi \leq b$.¹

¹**Теорема 1'** (обобщённая теорема о среднем значении). Пусть $\varphi(x)$ и $f(x)\varphi(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$; при любом значении $x \in [a, b]$ выполняется: $m \leq f(x) \leq M$, $\varphi(x) \geq 0$ (или $\varphi(x) \leq 0$). Тогда $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu \int_a^b \varphi(x)dx$, где $m \leq \mu \leq M$.

Теорема 2 (2-я теорема о среднем). Если:

- 1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и интегрируемы на сегменте $[a, b]$;
- 2) функция $\varphi(x)$ монотонна при $x \in (a, b)$, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x)dx + \varphi(b-0) \int_\xi^b f(x)dx,$$

где $a \leq \xi \leq b$;

3') если, сверх того, функция $\varphi(x)$ монотонно убывает (в широком смысле) и неотрицательна, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b);$$

3'') если же функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает (в широком смысле) и неотрицательна, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(b-0) \int_\xi^b f(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

Последние две формулы называют формулами *Бонне*.¹

Пример 139. [8, № 2323] Пользуясь первой теоремой о среднем значении, оценить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x}.$$

Решение. Поскольку на отрезке $[0, 2\pi]$ график $y = \cos x$ симметричен относительно прямой $x = \pi$ (т. к. $\cos(2\pi - x) = \cos x$), то, используя эту симметрию, получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x} = 2 \int_0^\pi \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x}.$$

Положим $f(x) = \frac{1}{1 + 0,5 \cos x}$ – непрерывна на $[0, 2\pi]$, $\varphi(x) \equiv 1$ – не меняет знака.

Применим первую теорему о среднем (её условия выполняются):

$$2 \int_0^\pi \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x} = \frac{2\pi}{1 + 0,5 \cos \xi}, \quad \text{где } 0 < \xi < \pi.$$

Оценим, далее, полученную дробь. Поскольку $-1 < \cos \xi < 1$, то $0,5 < 1 + 0,5 \cos \xi < 1,5$, следовательно, $\frac{2}{3} < \frac{1}{1 + 0,5 \cos \xi} < 2$, а значит,

$$\frac{4\pi}{3} < \frac{2\pi}{1 + 0,5 \cos \xi} < 4\pi.$$

Это и есть искомая оценка значения интеграла. $\square$

¹Пьер Оссан *Бонне* (1819–1892) – французский математик.

9.5 Задачи для самостоятельного решения

Задачи на сравнение чисел, представленных определёнными интегралами:

№361. [8, № 2316(а)] Определить знак интеграла

$$\int_0^{2\pi} x \cdot \sin x dx.$$

№362. [8, № 2316(б)] Определить знак интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

№363. С помощью неравенств (1) оценить интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

№364. С помощью неравенств (1) оценить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \sin^2 x} dx.$$

№365. С помощью неравенств (1) оценить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2}} dx.$$

№366. Не используя теорем о среднем, доказать, что

$$\sin 1 \leq \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{1+x^2} dx \leq 2 \sin 1.$$

№367. Не используя теорем о среднем, доказать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{3 + \sin x}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

№368. Привлекая неравенство Коши–Буняковского, доказать, что

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^x dx < \sqrt{e-1}.$$

№369. Используя неравенство Коши–Буняковского, доказать, что

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx < \frac{\pi^2}{\sqrt{6}}.$$

№370. С помощью неравенства Коши–Буняковского оценить интеграл

$$\int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos x}.$$

№371. С помощью неравенства Гёльдера оценить интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx.$$

Указание: положить $p = q = 2$.

№372. С помощью неравенства Чебышёва оценить интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx.$$

№373. Доказать, что $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx > 0$.

№374. [8, № 2317(а)] Какой интеграл больше:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx \quad \text{или} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx ?$$

№375. [8, № 2317(б)] Какой интеграл больше:

$$\int_0^1 e^{-x} dx \quad \text{или} \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx ?$$

№376. [8, № 2317(в)] Какой интеграл больше:

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx \quad \text{или} \quad \int_0^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx ?$$

№377. Что больше: $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$ или $4 \int_0^1 \cos(x^2) dx$?

№378. Что больше: $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ или $3 \int_0^1 \sin(x^6) dx$?

№379. Что больше: $\int_{-2}^3 \arctg x dx$ или $\int_{-3}^2 \arctg x dx$?

№380. Что больше: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$ или $\frac{\pi}{6}$?

№381. Что больше: $\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$ или $\frac{1}{3}$?

№382. Что больше: $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ или $\frac{\pi}{4} \ln 2$?

№383. Что больше: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+x^2+x^3} dx$ или 1?

№384. Упорядочить интегралы (не вычисляя их) в порядке возрастания значений:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\pi} dx.$$

№385. Найти $a > 0$ из неравенства $\int_{-a}^a e^{100x} dx > 0,04$.

Задачи на средние значения интегрируемых функций:

№386. [8, № 2318(a)] Определить среднее значение функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[0, 1]$. Каков геометрический смысл найденного среднего значения?

№387. [8, № 2318(г)] Определить среднее значение функции

$$f(x) = \sin x \cdot \sin(x + \varphi) \text{ на отрезке } [0, 2\pi].$$

№388. Определить среднее значение функции

$$f(x) = \operatorname{tg}^2 x \text{ на отрезке } [0, \frac{\pi}{4}].$$

№389. [8, № 2319.2] Найти среднее значение скорости свободно падающего тела, начальная скорость которого равна V_0 .

№390. [8, № 2321] Пусть $f(x) \in C[0, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. Найти

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt. \text{ Рассмотреть пример}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \operatorname{arctg} t dt.$$

№391. Привести пример функции $f \in C[0, +\infty)$, для которой существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, но не существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

№392. [8, № 2322(a)] Пусть $\int_0^x f(t) dt = x \cdot f(\theta x)$. Найти θ , если $f(t) = t^n$ ($n > -1$).

Задачи на применение теорем о среднем:

№393. Пусть $g(x) = \operatorname{sgn} x + \frac{1}{2}$. Показать, что на отрезке $[-3, 1]$ нет такой точки c , что $\int_{-3}^1 g(x) dx = g(c)(1 - (-3))$. Какое условие теоремы о среднем нарушено?

№394. Привести пример функций $f(x)$ и $g(x)$, непрерывных на сегменте $[a, b]$ и таких, что соотношение

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

не выполняется ни при каком действительном μ .

№395. Доказать неравенство $\int_0^{200} \frac{e^{-5x}}{x+20} dx < \frac{1}{100}$.

№396. [14, с. 20] Доказать неравенство $\int_0^{\pi} 4^{\sin x} dx \geq 4$, избегая непосредственного интегрирования.

№397. [8, № 2324] Пользуясь первой теоремой о среднем, оценить интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{1+x}}.$$

№398. [8, № 2326.1(a)] Доказать равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$$

№399. [8, № 2326.2(a)] Найти $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3 + 1}$.

№400. [8, № 2326.2(б)] Найти

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x}, \quad \text{где } a > 0, b > 0 \text{ и } f(x) \in C[0, 1].$$

№401. [8, № 2329] Пользуясь 2-й теоремой о среднем, оценить интеграл

$$\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \cdot \sin x dx \quad (\alpha \geq 0, 0 < a < b).$$

№402. [8, № 2330] Пользуясь 2-й теоремой о среднем, оценить интеграл

$$\int_a^b \sin(x^2) dx \quad (0 < a < b).$$

Указание: сделать замену $t = x^2$.

№403. [8, № 2333] Пользуясь 2-й теоремой о среднем, вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx \quad (p > 0).$$

№404. Используя теоремы о среднем, вычислить предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\cos(\operatorname{arctg}(e^x))}{x} dx.$$

№405. Пусть $\varphi(x) \in C(0, 1]$ и $|\varphi(x)| \leq Mx^\alpha$, где $M > 0$, $\alpha > -1$. Найти

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^{2\delta} \varphi(x) \cdot \frac{dx}{1+x}.$$

№406. Пусть $f, g \in R[a, b]$, T – разбиение сегмента $[a, b]$, состоящее из точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Найти

$$\lim_{\max |\Delta x_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x) dx.$$

Доказать неравенства интегрированием:

№407. Доказать неравенство:

$$1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \leq \ln \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Указание: проинтегрировать в пределах от 0 до x неравенство $\sin t \leq t \leq \operatorname{tg} t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2})$.

№408. Доказать неравенства

$$x - \sin x \leq 1 - \cos x \leq x\sqrt{2} - \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Указание: оценить выражение $\sin t + \cos t$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ и затем проинтегрировать 0 до x .

№409. Доказать неравенство ($n \in \mathbb{N}$)

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} < \ln 3.$$

Указание: воспользоваться неравенствами $\int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{n+k} < \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{x}$, где $k = 1, 2, \dots, 2n$.

№410. Найти целую часть числа $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}}$.

Указание: воспользоваться неравенствами типа $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

№411. [8, № 2331] Доказать неравенство Коши–Буняковского в интегральной форме:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

Указание: проинтегрировать по x в пределах от a до b неравенство

$$(f(x) - t \cdot g(x))^2 \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

9.6 Ответы и решения

361. По свойству аддитивности, имеем

$$\int_0^{2\pi} x \cdot \sin x dx = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot \sin x dx =$$

(сделаем во втором интеграле замену $t = x - \pi$)

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx + \int_0^{\pi} (t + \pi) \sin(t + \pi) dt = \\ &= \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx - \int_0^{\pi} t \cdot \sin t dt - \pi \int_0^{\pi} \sin t dt = \\ &= -\pi \int_0^{\pi} \sin t dt = -\pi^2 \cdot \sin \xi < 0 \quad (0 < \xi < \pi) \end{aligned}$$

(по 1-й теореме о среднем).

362. Рассмотрим функцию $F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ Тогда

$$I = \int_0^{2\pi} F(x) dx = \int_0^{\pi} F(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Сделав во втором интеграле замену $t = x - \pi$, получим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} F(x) dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin(\pi + t)}{\pi + t} dt = \int_0^{\pi} F(x) dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi + t} dt = \\ &= \int_0^{\pi} \left(F(x) - \frac{\sin x}{\pi + x} \right) dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x(\pi + x) - x \sin x}{x(\pi + x)} dx = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{x(\pi + x)} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{F(x)}{\pi + x} dx = \pi \cdot F(\xi) \cdot \int_0^{\pi} \frac{dx}{\pi + x} = \\ &= \pi \cdot F(\xi) \cdot \ln |\pi + x| \Big|_0^{\pi} = \pi \cdot F(\xi) \cdot \ln 2, \quad \text{где } 0 < \xi < \pi. \end{aligned}$$

Так как $F(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} > 0$ на $(0, \pi)$, то $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 0$.

363. Легко проверить, что подынтегральная функция на отрезке $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ убывает, поэтому

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{4} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{4}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

364. Оценим подынтегральное выражение. Поскольку $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \sin^2 x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{2 - \sin^2 x} \leq \sqrt{2}$. Теперь возможно оценить сам интеграл, проинтегрировав полученное неравенство в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \sin^2 x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

365. Оценим подынтегральную функцию. На сегменте $[0, \frac{\pi}{4}]$ имеем $0 \leq \sin^2 x \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq \operatorname{tg}^2 x \leq 1$, поэтому $\frac{1}{2} \leq \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2} \leq 2$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}$. Интегрируя от 0 до $\frac{\pi}{4}$, откуда находим искомые оценки снизу и сверху:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2}} dx \leq \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

366. Для доказательства достаточно умножить очевидное неравенство $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ на $\cos x$ и проинтегрировать в пределах от (-1) до 1:

$$\sin 1 \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos x dx \leq \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{1+x^2} dx \leq \int_{-1}^1 \cos x dx \leq 2 \sin 1.$$

367. Имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{3 + \sin x}} \geq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{3 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} \geq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

368. Положим в неравенстве Коши–Буняковского $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = e^x$:

$$\left(\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^x dx \right)^2 \leq \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{4}(e+1)(e-1) < e-1.$$

369. Запишем неравенство Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\pi x \cdot \sin x dx \right)^2 &\leq \int_0^\pi x^2 dx \cdot \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{\pi^3}{6} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^4}{6}. \end{aligned}$$

370. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$I^2 = \left(\int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos x} \right)^2 \leq \int_0^{\pi/4} x^2 dx \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi/4} \cdot \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^3}{3 \cdot 64},$$

откуда $0 < I \leq \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

371. По неравенству Гёльдера при $p = q = 2$ получаем оценку

$$\left(\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx \right)^2 \leq \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 e^{-2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (1 - e^{-2}),$$

откуда $\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx \leq \frac{1}{2} \sqrt{1 - e^{-2}}$.

372. Так как функция $f(x) = \sqrt{x}$ возрастает на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x) = e^{-x}$ убывает на нём, то по неравенству Чебышёва получаем

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx \leq \int_0^1 \sqrt{x} dx \cdot \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{2}{3} (1 - e^{-1}).$$

373. Сделаем замену переменной $y = x^2$:

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy \right).$$

Сделав во втором интеграле замену $z = y - \pi$, преобразуем полученное выражение:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin y}{\sqrt{y}} - \frac{\sin y}{\sqrt{y + \pi}} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin y \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y + \pi}} \right) dy.$$

Этот интеграл положителен, так как подынтегральная функция положительна на $(0, \pi)$.

374. Рассмотрим разность этих интегралов $\int_0^{\pi/2} (\sin^{10} x - \sin^2 x) dx$ и будем сравнивать её с 0. Поскольку $\sin^{10} x < \sin^2 x$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\sin^{10} x = \sin^2 x$ при $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$, то $\int_0^{\pi/2} (\sin^{10} x - \sin^2 x) dx < 0$, т. е. первый интеграл меньше.

375. Так как $e^{-x} < e^{-x^2}$ при $x \in (0, 1)$, то второй интеграл больше.

376. Обозначим интегралы, соответственно, I_1 и I_2 . Сделаем во втором из интегралов замену $t = x - \pi$, чтобы пределы интегрирования в обоих интегралах стали одинаковыми:

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} e^{-(\pi+t)^2} \cos^2(\pi+t) dt = \int_0^{\pi} e^{-(\pi+t)^2} \cos^2 t dt.$$

Составим разность этих интегралов:

$$I_1 - I_2 = \int_0^{\pi} \left(e^{-x^2} - e^{-(\pi+x)^2} \right) \cos^2 x dx.$$

Заметим, что функция $\cos^2 x$ не меняет знака на $[0, \pi]$. По 1-й теореме о среднем имеем:

$$I_1 - I_2 = (e^{-\xi^2} - e^{-(\pi+\xi)^2}) \cdot \int_0^\pi \cos^2 x dx > 0 \quad (0 < \xi < \pi),$$

т. к. $\int_0^\pi \cos^2 x dx > 0$ и $(e^{-\xi^2} - e^{-(\pi+\xi)^2}) > 0$. Поэтому первый интеграл больше.

377. Сделав в первом интеграле замену $t = \sqrt{x}$, а во втором замену $t = x^2$, придём к сравнению чисел

$$\int_0^1 t \cos t dt \quad \vee \quad \int_0^1 \cos t \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \cos t \left(t - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt \quad \vee \quad 0.$$

Так как при $t \in (0, 1)$ имеем $\cos t > 0$, $t - \frac{1}{\sqrt{t}} < 0$, то подынтегральная функция отрицательна, а значит интеграл отрицателен. Ответ: второе число больше.

378. Сделав в первом интеграле замену $t = x^2$, а во втором замену $t = x^6$, придём к сравнению чисел

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \quad \vee \quad \int_0^1 \frac{\sin t}{t^{5/6}} dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \sin t \left(\frac{1}{t^{1/2}} - \frac{1}{t^{5/6}} \right) dt \quad \vee \quad 0.$$

Так как при $t \in (0, 1)$ имеем $\sin t > 0$, $\frac{1}{t^{1/2}} - \frac{1}{t^{5/6}} < 0$, то подынтегральная функция отрицательна, а значит интеграл отрицателен. Ответ: второе число больше.

379. Первое число больше. *Указание:* построив график функции $y = \arctg x$ на соответствующих отрезках интегрирования, воспользуйтесь геометрическим смыслом определённого интеграла.

380. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$

381. *Указание:* воспользоваться оценкой $x^2 e^{-x^2} \leq x^2$, $x \in [0, 1]$.

382. *Указание:* воспользоваться оценкой $\ln(1+x) \leq \ln 2$, $x \in [0, 1]$.

383. *Указание:* воспользоваться оценкой $\frac{\cos x}{1+x^2+x^3} \leq \frac{1}{1+x^2}$ и затем неравенством $\arctg x < x$, $x \in (0, +\infty)$.

384. Поскольку $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\pi} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx.$$

385. Поскольку $\int_{-a}^a e^{100x} dx = 0,01(e^{100a} - e^{-100a})$, то $\int_{-a}^a e^{100x} dx > 0,04 \Leftrightarrow e^{100a} - e^{-100a} > 4$. Обозначив $e^{100a} = t > 0$, получим $\frac{t^2 - 4t - 1}{t} > 0$ и $t > 2 + \sqrt{5}$. Отсюда $a > 0,01 \cdot \ln(2 + \sqrt{5})$.

386. Имеем $M[f] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой $y = x^2$, а снизу отрезком $[0, 1]$, численно равна площади прямоугольника высотой $1/3$ и основанием в виде отрезка $[0, 1]$.

387. Имеем

$$\begin{aligned} M[f] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin(x + \varphi) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi - \cos(2x + \varphi)}{2} dx = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi dx - \int_0^{2\pi} \cos(2x + \varphi) dx \right) = \frac{\cos \varphi}{2}. \end{aligned}$$

388. Имеем для среднего значения функции

$$M[f] = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx = \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \right) = \dots = \frac{4}{\pi} - 1.$$

389. Скорость свободно падающего тела в момент времени t выражается формулой $V(t) = V_0 + g \cdot t$, где V_0 – начальная скорость, g – ускорение свободного падения. Тогда

$$M[V] = \frac{1}{T} \int_0^T (V_0 + g \cdot t) dt = V_0 + \frac{g}{T} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^T = V_0 + \frac{gT}{2} = \frac{V(T) + V_0}{2}.$$

390. 1) Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$. Для определённости будем считать, что $A > 0$. Покажем, что $\int_0^x f(t) dt \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. В самом деле, поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, то по определению предела функции это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Тогда при достаточно больших x имеем

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^\delta f(x) dx + \int_\delta^x f(x) dx.$$

Первый их интегралов есть некоторое число, а для второго имеем оценку

$$\int_\delta^x f(x) dx > \int_\delta^x (A - \varepsilon) dx = (A - \varepsilon)x \Big|_\delta^x \rightarrow +\infty \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, $\int_0^x f(x) dx$ – бесконечно большая функция при $x \rightarrow +\infty$. Тогда имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\int_0^x f(t) dt)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{1} = A.$$

2) Пусть теперь $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Покажем, что и в этом случае $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 0$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) + 1$. Так как по условию $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. Следовательно, по доказанному имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = 1$. Но тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (g(t) - 1) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x 1 dt =$$

$1 - 1 = 0$, что и требовалось доказать.

391. Например, $f(x) = \sin x$.

392. По условию $\int_0^x t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1} = x \cdot (\theta x)^n$. Отсюда $\theta^n = \frac{1}{n+1}$, т. е. $\theta = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \text{const.}$

393. На сегменте $[-3, 1]$ нет такой точки c , что $\int_{-3}^1 g(x) dx = g(c)(1 - (-3))$, потому что $\int_{-3}^1 g(x) dx = 0$, а функция $g(x)$ не принимает нулевого значения.

Причина, по которой не применима теорема о среднем: функция $g(x)$ разрывна на сегменте $[-3, 1]$.

394. Рассмотрим функции $f(x) = g(x) = x$, непрерывные на сегменте $[-a, a] \forall a > 0$. Тогда имеем, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{2a^3}{3} > 0.$$

Теперь рассмотрим $\mu \int_a^b g(x) dx = \mu \int_{-a}^a x dx = \mu \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-a}^a = \mu \cdot 0 = 0$, т. е. $\forall \mu \in \mathbb{R}$ получили $\mu \int_a^b g(x) dx = 0$. Иными словами, мы доказали, что для этой пары

функций ни при каком $\mu \in \mathbb{R}$ не выполняется $\int_{-a}^a x^2 dx = \mu \int_{-a}^a x dx$. Первая теорема о среднем здесь не применима, так как нарушено условие сохранения знака функции $g(x)$ на отрезке интегрирования.

395. Воспользуемся первой теоремой о среднем значении интеграла, положив $f(x) = \frac{1}{x+20}$, $\varphi(x) = e^{-5x}$, тогда $\exists \xi : 0 \leq \xi \leq 200$ такое, что

$$\int_0^{200} \frac{e^{-5x}}{x+20} dx = \frac{1}{\xi+20} \int_0^{200} e^{-5x} dx < \frac{1}{20} \int_0^{200} e^{-5x} dx =$$

$$= \frac{1}{20} \left(-\frac{1}{5e^{5x}} \right) \Big|_0^{200} = \frac{1}{20} \left(-\frac{1}{5e^{1000}} + \frac{1}{5} \right) < \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{100}.$$

396. Заметим, что, $\int_0^\pi 4^{\sin x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} 4^{\sin x} dx$ (докажите это, разбив интеграл на два интеграла $\int_0^{\pi/2} \dots + \int_{\pi/2}^\pi \dots$ и сделав во втором из них подстановку $u = \pi - x$). Тогда достаточно доказать, что $I = \int_0^{\pi/2} 4^{\sin x} dx \geq 2$. Сделав замену $t = \sin x$, придём к интегралу $I = \int_0^1 4^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. По первой теореме о среднем этот интеграл равен $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^1 4^t dt$, где $0 \leq \xi \leq 1$. Так как $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \geq 1$, то приходим к оценке $I \geq \int_0^1 4^t dt = \frac{4^t}{\ln 4} \Big|_0^1 = \frac{3}{\ln 4}$. Осталось показать, что $\frac{3}{\ln 4} > 2$, т. е. $2 \ln 4 < 3 \Leftrightarrow 16 < e^3$, но это верно, поскольку $e^3 > (2,7)^3 = 19,68\dots > 19 > 16$.

397. Заметим, что для получения более точной оценки при применении 1-й теоремы о среднем следует выносить из-под интеграла ту функцию, которая меняется более плавно. В данном случае лучше вынести $\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ ($0 < \xi < 1$), а x^9 оставить под знаком интеграла:

$$I = \int_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \cdot \frac{x^{10}}{10} \Big|_0^1 = \frac{1}{10\sqrt{1+\xi}}.$$

Так как $1 < \sqrt{1+\xi} < \sqrt{2}$, то $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} < 1$ и поэтому получаем $\frac{1}{10\sqrt{2}} < I < \frac{1}{10}$.

398. По 1-й теореме о среднем имеем ($0 < \xi < 1$):

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{(1+\xi)(1+n)}.$$

Поэтому $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+\xi)(1+n)} = 0$.

399. По 1-й теореме о среднем имеем $\int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3 + 1} = \frac{1}{\varepsilon \xi^3 + 1}$, где $0 < \xi < 1$.

Тогда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3 + 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \xi^3 + 1} = 1$.

400. По 1-й теореме о среднем $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x} = f(\xi) \cdot \ln \frac{b}{a}$, где $a\varepsilon < \xi < b\varepsilon$. При $\varepsilon \rightarrow +0$ имеем $\xi \rightarrow 0$ и $f(x) \in C[0, 1]$, поэтому $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x} = f(0) \cdot \ln \frac{b}{a}$.

401. По 2-й теореме о среднем, полагая $\varphi(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{x}$, $f(x) = \sin x$ ($\varphi(x)$ неотрицательна и монотонно убывает, т. к. $\varphi'(x) < 0$), имеем

$$\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \cdot \sin x \, dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x) \, dx = \frac{e^{-\alpha a}}{a} (-\cos x) \Big|_a^\xi = \frac{e^{-\alpha a}}{a} (\cos a - \cos \xi).$$

Отсюда получаем оценку: т. к. $-2 \leq \cos a - \cos \xi \leq 2$, то

$$-\frac{2}{a} < -2 \cdot \frac{e^{-\alpha a}}{a} \leq \frac{e^{-\alpha a}}{a} (\cos a - \cos \xi) \leq 2 \cdot \frac{e^{-\alpha a}}{a} < \frac{2}{a}.$$

Итак, $-\frac{2}{a} < I < \frac{2}{a}$, т. е. $-1 < \frac{I}{2/a} < 1$. Положим $\frac{I}{2/a} = \theta$, тогда окончательно $I = \frac{2\theta}{a}$, где $|\theta| < 1$.

402. Положим $t = x^2$, тогда $I = \int_a^b \sin(x^2) \, dx = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} \, dt =$ (применяя 2-ю теорему о среднем, получим) $= \frac{1}{2a} \int_{a^2}^\xi \sin t \, dt = \frac{\cos(a^2) - \cos \xi}{2a}$, где $a^2 < \xi < b^2$.

Отсюда $-\frac{1}{a} < I = \frac{\cos(a^2) - \cos \xi}{2a} < \frac{1}{a}$. Если умножить на a , то получим $-1 < aI < 1$. Полагая $\theta = aI$, находим $I = \theta/a$, где $|\theta| < 1$.

403. Функция $\varphi(x) = 1/x$ — интегрируема по Риману, монотонно убывает и неотрицательна на $[n, n+p]$, $f(x) = \sin x$ — непрерывна. Согласно 2-й теореме о среднем значении, найдётся $\xi \in (n, n+p)$:

$$\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{1}{n} \int_n^\xi \sin x \, dx = \frac{1}{n} (\cos n - \cos \xi).$$

Т. к. $\left| \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} \, dx \right| = \frac{|\cos n - \cos \xi|}{n} \leq \frac{2}{n}$ при любом n , то $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} \, dx = 0$.

404. Положим $f(x) = \cos(\operatorname{arctg}(e^x))$, $\varphi(x) = 1/x$, обе функции непрерывны, а значит, интегрируемы в собственном смысле; $\varphi(x)$ не меняет знака (положительна на $(\varepsilon, 2\varepsilon)$). По 1-й теореме о среднем найдётся такое $\xi \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$, что

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\cos(\operatorname{arctg}(e^x))}{x} \, dx = \cos(\operatorname{arctg}(e^\xi)) \cdot \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{dx}{x} = \cos(\operatorname{arctg}(e^\xi)) \cdot \ln |x| \Big|_\varepsilon^{2\varepsilon} =$$

$= \cos(\operatorname{arctg}(e^\xi)) \cdot \ln 2$. Поскольку $\varepsilon \rightarrow 0$ и $2\varepsilon \rightarrow 0$, то $\xi \rightarrow 0$, тогда $e^\xi \rightarrow 1$, $\operatorname{arctg}(e^\xi) \rightarrow \frac{\pi}{4}$, $\cos(\operatorname{arctg}(e^\xi)) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ (в силу непрерывности сложной функции $\cos(\operatorname{arctg}(e^\xi))$ по ξ), следовательно, переходя к пределу, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\cos(\operatorname{arctg}(e^x))}{x} \, dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ln 2.$$

405. Покажем, что предел равен нулю.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta}^{2\delta} \varphi(x) \frac{dx}{1+x} \right| &\leq \int_{\delta}^{2\delta} |\varphi(x)| \frac{dx}{1+x} \leq M \int_{\delta}^{2\delta} \frac{x^{\alpha} dx}{1+x} \leq \\ &\leq M \int_{\delta}^{2\delta} x^{\alpha} dx = M \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_{\delta}^{2\delta} = \frac{M}{\alpha+1} ((2\delta)^{\alpha+1} - \delta^{\alpha+1}). \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha + 1 > 0$ и $\delta \rightarrow 0$, то $(2\delta)^{\alpha+1} \rightarrow 0$ и $\delta^{\alpha+1} \rightarrow 0$ и поэтому получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^{2\delta} \varphi(x) \cdot \frac{dx}{1+x} = 0.$$

406. Указание: применить 1-ю теорему о среднем к интегралу $\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x) dx$.

Ответ: $\int_a^b f(x)g(x)dx$.

407. Проинтегрировав неравенство в пределах от 0 до x , получаем

$$\int_0^x \sin t dt \leq \int_0^x t dt \leq \int_0^x \operatorname{tg} t dt \Leftrightarrow -\cos t \Big|_0^x \leq \frac{t^2}{2} \Big|_0^x \leq -\ln |\cos t| \Big|_0^x,$$

откуда приходим к требуемому неравенству.

408. Перепишем неравенства в виде $x \leq 1 + \sin x - \cos x \leq x\sqrt{2}$. Оценим выражение $\sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4})$, т. е. при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $1 \leq \sin t + \cos t \leq \sqrt{2}$. Проинтегрируем его от 0 до x :

$$\int_0^x dt \leq \int_0^x (\sin t + \cos t) dt \leq \int_0^x \sqrt{2} dt \Leftrightarrow x \leq 1 + \sin x - \cos x \leq x\sqrt{2},$$

что и требовалось доказать.

409. Возьмём функцию $\frac{1}{x}$ и рассмотрим неравенства

$$\int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{n+k} < \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{x}, \quad \text{где } k = 1, 2, \dots, 2n.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} + \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x} + \dots + \int_{3n-1}^{3n} \frac{dx}{x} = \int_n^{3n} \frac{dx}{x} = \ln 3.$$

$$\begin{aligned} \textbf{410.} \text{ Имеем } \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}} &< \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \dots + \int_{10^6-1}^{10^6} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{10^{12}} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{9} = 14997 + 3 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt[3]{9} \right) < 14997. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}} > \int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_5^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \dots + \int_{10^6}^{10^6+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_4^{10^6+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(10^6 + 1)^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{16} > \frac{3}{2} 10^4 - \frac{3}{2} \sqrt[3]{16} = 14996 + \frac{8 - 3\sqrt[3]{16}}{2} > 14996.$$

Таким образом, число лежит строго между 14996 и 14997, и поэтому его целая часть равна 14996.

411. Интегрируя неравенство $(f(x) - t \cdot g(x))^2 \geq 0$ ($x \in [a, b]$, $t \in \mathbb{R}$), получаем

$$\int_a^b (f(x) - t \cdot g(x))^2 dx \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \int_a^b g^2(x) dx - 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx \geq 0.$$

Левая часть неравенства есть квадратный трёхчлен относительно t вида $At^2 + Bt + C \geq 0$, где $A = \int_a^b g^2(x) dx > 0$ (случай $\int_a^b g^2(x) dx = 0$ рассматривается отдельно), $B = -2 \int_a^b f(x)g(x) dx$, $C = \int_a^b f^2(x) dx$. Неравенство выполняется при всех $t \Leftrightarrow$ когда дискриминант этого трёхчлена неположителен:

$$D = \left(2 \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \leq 0,$$

откуда вытекает требуемое неравенство.

10 СЕМИНАР: Несобственный интеграл. Сходимость. Формула Ньютона–Лейбница. Признаки сходимости

«Самый тяжёлый вид безработицы – это неработающая голова».
Еврейский анекдот.

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Ранее мы изучили понятие определённого собственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ (Римана) для случая *конечного* промежутка $[a, b]$ и *ограниченной* функции $f(x)$. Обобщим это понятие на те случаи, когда либо промежуток интегрирования бесконечен, либо подынтегральная функция является неограниченной.

10.1 Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода: особые точки, сходимость, свойства

Несобственные интегралы 1-го рода. Пусть функция $f(x)$ определена при $a \leq x < +\infty$ и интегрируема в собственном смысле на каждом конечном сегменте $[a, A]$, где A – произвольное число, большее a . Тогда *несобственным интегралом 1-го рода* назовём предел (конечный или бесконечный)

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx. \quad (1)$$

Бесконечно удалённая точка $x = +\infty$ называется в этом случае *особой точкой* (*особенностью*) 1-го рода. Если предел (1) существует и конечен, то говорят, что интеграл *сходится*, а функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* в бесконечном промежутке $[a, +\infty)$ (в несобственном смысле). Если же данный предел бесконечен или не существует, то про интеграл говорят, что он *расходится*.

По определению будем считать, что если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, +\infty)$, то

$$\int_{+\infty}^a f(x)dx = - \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

(как и в случае с собственным интегралом, при перестановке пределов интегрирования меняется знак интеграла).

Пример 140. При каких p интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится (расходится)?

Решение. Вычислим данный несобственный интеграл (1-го рода) по определению, т. е. как предел собственного интеграла. При $p \neq 1$ имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right).$$

Очевидно, данный предел конечен при $p > 1$ и бесконечен при $p < 1$ (т. е. интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p < 1$). Вычисляя интеграл при $p = 1$, убеждаемся, что он расходится.

Ответ: интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Пример 141. Сходится ли несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \cos x dx$?

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла:

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\sin x) \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\sin A - \sin 0).$$

Поскольку $\lim_{A \rightarrow +\infty} \sin A$ не существует, то данный интеграл расходится. $\square$

Аналогично (1) определяются интегралы 1-го рода

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^a f(x) dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{A' \rightarrow -\infty \\ A'' \rightarrow +\infty}} \int_{A'}^{A''} f(x) dx$$

при произвольном и независимом стремлении $A' \rightarrow -\infty$ и $A'' \rightarrow +\infty$. В этом случае при любом a имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

причём интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ сходится в том и только в том случае, когда сходится каждый из интегралов в правой части.

Для обозначения факта сходимости несобственного интеграла (1) от неотрицательной функции $f(x)$ иногда используют условный символ

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty$$

(так же как и для обозначения сходимости интеграла от неположительной функции – символ $\int_a^{+\infty} f(x) dx > -\infty$).

Пример 142. Сходится ли интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$?

Решение. Разобьём интеграл на два (чтобы в каждом было по одной особой точке) и попробуем вычислить каждый из них по определению:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+1} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x+2)^2+1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^0 \frac{dx}{(x+2)^2+1} + \lim_{A'' \rightarrow +\infty} \int_0^{A''} \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \\ &= \lim_{A' \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg}(x+2)) \Big|_{A'}^0 + \lim_{A'' \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg}(x+2)) \Big|_0^{A''} = \\ &= \left(\operatorname{arctg} 2 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2 \right) = \pi. \end{aligned}$$

Ответ: интеграл сходится (так как принимает конечное значение). $\square$

Пример 143. Доказать, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ расходится.

Решение. Можно было, как в предыдущем примере, разбить интеграл на два интеграла и показать, что каждый из них расходится (а значит, и их сумма), но поступим иначе. По определению, если интеграл сходится, то его можно вычислить, положив, например, $A' = -A$, $A'' = 2A > 0$, как предел

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^{2A} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-A}^{2A} = +\infty.$$

С другой стороны, взяв $A' = -2A$, $A'' = A > 0$, приходим к иному результату

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-2A}^A x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-2A}^A = -\infty.$$

Получились разные значения, что противоречит существованию данного предела, т. е. интеграл расходится. $\square$

Несобственные интегралы 2-го рода. Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную в конечном полуинтервале $[a, b)$ и неограниченную в левой окрестности точки b . Пусть эта функция собственно интегрируема на каждом сегменте $[a, b - \varepsilon]$ (при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$). Точку b в этом случае называют *особой точкой* 2-го рода. Тогда *несобственным интегралом 2-го рода* от функции $f(x)$ на промежутке от a до b называется предел (конечный или бесконечный)

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (2)$$

В случае, когда этот предел конечен, говорят, что интеграл (2) *сходится*, а неограниченную функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* в пределах от a до b (в несобственном смысле). Если же предел (2) бесконечен или не существует,

то говорят, что интеграл *расходится*, а функция $f(x)$ — *не интегрируема* на данном промежутке. В частности, если этот предел равен $+\infty$, то говорят, что интеграл расходится к $+\infty$.

Так же как и в случае с собственным интегралом, по определению будем считать, что если $f(x)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке от a до b ,¹ то

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

Пусть теперь на промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет особую точку 2-го рода c , расположенную внутри этого промежутка, т. е. как слева, так и справа от этой точки функция является неограниченной. При этом функция интегрируема по Риману на каждом из сегментов $[a, c - \varepsilon_1]$ и $[c + \varepsilon_2, b]$ при произвольных достаточно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Тогда интеграл от $f(x)$ по этому промежутку определяется как предел суммы

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \right),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0$ одновременно и независимо друг от друга. Интеграл считается сходящимся только в случае, когда существуют и конечны пределы от обоих интегралов в скобках. В противном случае интеграл будет расходящимся.

Пример 144. При каких значениях p интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится (расходится)?

Решение. Вычислим интеграл по определению (как предел собственного интеграла). При $p \neq 1$ имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} \right).$$

Очевидно, данный предел конечен при $p < 1$ и бесконечен при $p > 1$ (т. е. интеграл сходится при $p < 1$ и расходится при $p > 1$). Вычисляя интеграл при $p = 1$, убеждаемся, что он расходится.

Ответ: интеграл сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Замечание 1. В общем случае, если на промежутке $[a, b]$ функция имеет конечное число особых точек, в окрестностях которых эта функция не ограничена, а в промежутках между ними — собственно интегрируема, надо разбить $[a, b]$ на части так, чтобы в каждом из вновь полученных интегралов была только одна особая точка. Для несобственных интегралов на бесконечном

¹Далее для обозначения промежутка интегрирования у несобственного интеграла будем использовать привычный символ $[a, b]$, в котором a и b могут принимать и бесконечные значения (быть особыми точками 1-го или 2-го рода).

промежутке особых точек может быть бесконечно много, лишь бы в каждом конечном промежутке $[a, A]$ их было бы конечное число.

Замечание 2. При исследовании несобственных интегралов на сходимость (как и при вычислении их по определению) выясняют сходимость интеграла в окрестности каждой из особых точек (если особая точка 2-го рода, то отдельно в левой и правой её окрестностях). Интеграл считается сходящимся, только если он сходится в каждой окрестности каждой своей особой точки. В противном случае интеграл считают расходящимся.

Замечание 3. Несобственные интегралы 1-го и 2-го родов связаны между собой следующим образом: с помощью подстановки $t = \frac{1}{b-x}$ несобственный интеграл 2-го рода $\int_a^b f(x)dx$ с особенностью в точке b приводится к виду несобственного интеграла 1-го рода с особой точкой $+\infty$. Поэтому многие теоремы, отражающие свойства несобственных интегралов, часто формулируются лишь для интегралов 1-го рода.

Замечание 4. (Геометрический смысл несобственного интеграла). Если $f(x) \in C[a, +\infty)$, $f(x) \geq 0$, то интеграл (1) равен площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции f , снизу – осью абсцисс, слева – прямой $x = a$. Аналогично для несобственного интеграла 2-го рода. Для сходящихся интегралов площадь получается конечной.

Пример 145. При каких p сходится интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$?

Решение. Разобьём интеграл на два, чтобы в каждом было по одной особой точке:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = I_1 + I_2.$$

Как было выяснено выше, при $p < 1$ интеграл I_1 сходится, а интеграл I_2 расходится, при $p > 1$ – наоборот, интеграл I_2 сходится, а интеграл I_1 расходится, т. е. в каждом из этих случаев их сумма будет расходиться. При $p = 1$ оба интеграла (а значит, и их сумма) также расходятся.

Ответ: интеграл расходится при всех $p \in \mathbb{R}$.

Свойства несобственных интегралов. Так как несобственные интегралы, по сути, являются пределами собственных, то их свойства во многом аналогичны (там, где свойство приведено для интегралов 1-го рода, сформулируйте его самостоятельно на случай интегралов 2-го рода).

1. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то сходится также и любой интеграл вида $\int_A^{+\infty} f(x)dx$, где $A > a$, и наоборот, при этом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^{+\infty} f(x)dx.$$

2. Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(x)dx = 0$.

3. (*Линейность*). Если оба несобственных интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$, причём

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

При этом сумма двух неинтегрируемых функций может оказаться интегрируемой функцией.

Пример 146. Рассмотрите функции $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = -\frac{1}{x}$ на промежутке $[1, +\infty)$.

Но сумма (разность) интегрируемой и неинтегрируемой функций всегда есть функция неинтегрируемая.

4. (*Аддитивность*). Пусть функция $f(x)$ интегрируема (в несобственном смысле) на наибольшем из промежутков $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ (a, b, c могут принимать и бесконечные значения). Тогда она интегрируема в двух других, причём имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ интегрируема (в несобственном смысле) на $[a, b]$ и не интегрируема (в несобственном смысле) на $[b, c]$, то она не интегрируема на объединении этих промежутков, т. е. на $[a, c]$.

5. Из интегрируемости (в несобственном смысле) на промежутке $[a, b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ не следует, вообще говоря, интегрируемость на $[a, b]$ их произведения.

Пример 147. На следующем семинаре будет показано, что если рассмотреть, например, $f(x) = g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ на промежутке $[1, +\infty)$, то интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится по признаку Дирихле, однако интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ расходуется (как сумма расходящегося и сходящегося интегралов). $\square$

Обращаем внимание на отличие этого свойства от аналогичного свойства собственных интегралов.

6. (*Связь интегрируемости с абсолютной интегрируемостью*). Если функция $f(x)$ интегрируема (в несобственном смысле) на некотором промежутке, то её модуль $|f(x)|$, вообще говоря, не обязательно интегрируем на этом промежутке.

Пример 148. На следующем семинаре вы сможете доказать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится. $\square$

Наоборот, для несобственных интегралов из интегрируемости функции $|f(x)|$ на $[a, b]$ следует интегрируемость на этом промежутке функции $f(x)$.

Обращаем внимание на отличие этого свойства от аналогичного свойства интегралов Римана (там из интегрируемости в собственном смысле на сегменте $[a, b]$ вытекала интегрируемость $|f(x)|$ на этом сегменте).

7. (*Независимость несобственного интеграла от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования*):

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(t) dt = \dots$$

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, +\infty)$, то она, вообще говоря, не обязательно ограничена на этом промежутке.

Пример 149. Функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$ интегрируема (в несобственном смысле) на промежутке $[0, +\infty)$, однако, очевидно, эта функция не является ограниченной на нём. $\square$

9. (*Монотонность*). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a, +\infty)$ (или в несобственном смысле на $[a, b]$) и при всех x из этого промежутка справедливо неравенство $f(x) \leq g(x)$, то интегралы от этих функций связаны тем же знаком:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

10. Если функция $f(x)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[a, +\infty)$ (или $[a, b]$) и в точке $x = x_0$ из промежутка $(a, +\infty)$ (или (a, b)) функция $f(x)$ непрерывна, то существует производная для функции $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ в этой точке, причём $F'(x_0) = f(x_0)$.

Теоремы о среднем также обобщаются на случай несобственных интегралов [26].

Среднее значение интегрируемой в несобственном смысле функции. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, +\infty)$ и интегрируема в собственном смысле на любом конечном промежутке вида $[a, x]$, принадлежащем области определения. *Средним значением* функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$ называется число

$$M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^x f(t) dt.$$

10.2 Вычисление несобственных интегралов

«Как много мы знаем, и как мало мы понимаем».
 Альберт Эйнштейн (1879–1955) – физик-теоретик,
 один из основателей современной теоретической
 физики, автор теории относительности. Лауреат
 Нобелевской премии по физике 1921 года,
 общественный деятель-гуманист.

При вычислении несобственных интегралов используются те же приёмы и методы, что и при вычислении собственных интегралов, но с учётом особенностей этого вида интегралов.

10.2.1 Формулы Ньютона–Лейбница

Теорема 1 (основная теорема интегрального исчисления, для несобственных интегралов 1-го рода). Пусть функция $f(x)$ определена в бесконечном промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема в собственном смысле на любом конечном сегменте $[a, A]$ ($A > a$). Если для $f(x)$ при этом существует первообразная функция $F(x)$ на всём промежутке $[a, +\infty)$ и существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

Подобным образом формулируется теорема для случаев интегралов 1-го рода

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(x) \Big|_{-\infty}^a = F(a) - F(-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Эти формулы носят название формул *Ньютона–Лейбница*. Для интегралов 2-го рода формулы Ньютона–Лейбница выписываются аналогичным образом.

Замечание. Очевидно, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty).$$

Пример 150. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ по формуле Ньютона–Лейбница.

Решение. Убедившись, что формула Ньютона–Лейбница применима (первообразная $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2}$ непрерывна в области интегрирования), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Пример 151. Сходится ли интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$?

Решение. Функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $\sin x$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$, поэтому по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Но поскольку данная двойная подстановка не имеет смысла, т. к. не существуют пределы $(-\cos x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то интеграл расходится. $\square$

Пример 152. Вычислить несобственный интеграл $\int_{2/\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} dx$.

Решение. По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$-\int_{2/\pi}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_{2/\pi}^{+\infty} = 1 - 0 = 1. \quad \square$$

10.2.2 Формула замены переменной

Теорема 2 (замена переменной в несобственных интегралах 1-го и 2-го рода). Пусть выполняются следующие условия:

- 1) функция $f(x)$ непрерывна в конечном или бесконечном промежутке $[a, b)$ (b – единственная особая точка 1-го или 2-го рода);
- 2) функция $x = x(t)$ непрерывно дифференцируема и строго монотонна на промежутке $[\alpha, \beta)$ ¹;
- 3) $x(\alpha) = a$, $x(t) \rightarrow b$ при $t \rightarrow \beta$.

Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) \cdot x'(t) dt$$

в предположении, что существует один из этих интегралов (существование другого отсюда уже вытекает).

Замечание. Интеграл справа будет либо собственным, либо несобственным – с единственной особой точкой β .

¹ β может принимать бесконечное значение.

Пример 153. Вычислить $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

Решение. Особая точка: $x = 1$. Положим $t = \sqrt{x}$ — возрастает и имеет непрерывную производную на $[0, 1)$, тогда $x = t^2$, $dx = 2t dt$, $t(0) = 0$, $t \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 1$ и получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int_0^1 \frac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}} \cdot 2t dt = 2 \int_0^1 \arcsin t \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= 2 \int_0^1 \arcsin t d(\arcsin t) = (\arcsin t)^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 154. [17, с. 9] Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

Решение. Особая точка: $x = 1$. Положим $t = \sqrt{1-x}$ — убывает и имеет непрерывную производную на $[0, 1)$, тогда $x = 1 - t^2$, $dx = -2t dt$, $t(0) = 1$, $t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \int_1^0 \frac{-2t dt}{(2-(1-t^2))t} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

10.2.3 Интегрирование по частям

Обратимся к известному методу интегрирования по частям и проанализируем, как он работает в случае несобственных интегралов.

Теорема 3' (*интегрирование по частям несобственного интеграла 1-го рода*). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a, +\infty)$, и пусть существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x))$. Тогда из сходимости одного из интегралов

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx \quad \text{или} \quad \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$$

следует сходимость второго интеграла, причём справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

Теорема 3'' (*интегрирование по частям несобственного интеграла 2-го рода*). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a, b)$ (b — особая точка 2-го рода), и пусть существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow b-0} (f(x)g(x))$. Тогда из сходимости одного из интегралов

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx \quad \text{или} \quad \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

следует сходимость второго интеграла, причём справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Несобственный интеграл может появиться при интегрировании по частям функции, интегрируемой по Риману. Продемонстрируем это на примере.

Пример 155. Вычислить $\int_0^1 \arcsin x \, dx$.

Решение. Так как функция $\arcsin x$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$, то данный интеграл является собственным. Вычислим его интегрированием по частям:

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Заметим, что полученный интеграл $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ является сходящимся несобственным интегралом 2-го рода, найдём его:

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = 1.$$

Итак, $\int_0^1 \arcsin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1$. Причина появления несобственного интеграла связана в данном случае с тем, что подынтегральная функция $\arcsin x$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[0, 1 - \varepsilon]$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$, но не является такой на сегменте $[0, 1]$. $\square$

Пример 156. [8, № 2348] Выведа формулу понижения, вычислить несобственный интеграл в зависимости от значений n ($n \in \mathbb{N}$):

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad (\text{гамма-функция}).$$

Решение. Положим $f(x) = x^n$, $dg(x) = e^{-x} dx$, тогда $df(x) = nx^{n-1} dx$, $g(x) = -e^{-x}$ и, интегрируя по частям, находим рекуррентную формулу понижения:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n\Gamma(n),$$

где $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. Отсюда получаем

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \quad \square$$

10.3 Теорема сравнения. Признаки сравнения

«Учись или отойди».

Неизвестный автор

Часто необходимо не вычислить несобственный интеграл, а лишь установить сам факт его сходимости или расходимости. Для этих целей используются разнообразные признаки сходимости-расходимости, большинство из которых основаны на теореме сравнения.

10.3.1 Сходимость интегралов от неотрицательных функций

Имеется признак (на самом деле, критерий) сходимости для несобственных интегралов от положительных функций, который основан на следующем факте: если функция $f(x)$ положительна (неотрицательна) на $[a, +\infty)$, то интеграл $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ является монотонно возрастающей (неубывающей) функцией своего аргумента A . Приведём его формулировку.

Теорема 4 (*критерий сходимости интегралов от неотрицательных функций*). Если $f(x) \geq 0$ на полупрямой $[a, +\infty)$, то для сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(A)$ была ограниченной сверху: $\int_a^A f(x)dx \leq L = \text{const} \quad \forall A \geq a$.

Пример 157. Покажем, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ сходится. В самом деле, $\forall A \geq 1$ имеем ограниченность $F(A) = \int_1^A \frac{dx}{x^2+1} = \arctg x \Big|_1^A = \arctg A - \arctg 1 < \arctg A = L$. Следовательно, по теореме 4 данный интеграл сходится. $\square$

Есть также вполне понятный признак расходимости интегралов.

Теорема 5. Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$ и не ограничена сверху и(или) снизу при $x \rightarrow +\infty$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Например, по этой причине расходится интеграл $\int_1^{+\infty} x dx$.

10.3.2 Теорема сравнения

Перейдём к теореме сравнения. Теорема сравнения позволяет делать вывод о сходимости (расходимости) несобственного интеграла в связи со сходимостью (расходимостью) другого, обычно более простого, несобственного интеграла. На ней основаны многие известные признаки сравнения (сходимости) для несобственных интегралов. Сформулируем эту теорему отдельно для интегралов 1-го и 2-го рода.

Теорема 6' (*теорема сравнения для интегралов 1-го рода*). Если при $x \geq a$ имеет место неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \quad (1)$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad (2)$$

причём для их значений имеет место неравенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx,$$

а из расходимости интеграла (2) следует расходимость интеграла (1).

Сформулируем аналог этой теоремы для интегралов 2-го рода. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на полуинтервале $[a, b)$ и имеет на правом его конце (в точке $x = b$) единственную особую точку 2-го рода.

Теорема 6'' (*теорема сравнения для интегралов 2-го рода*). Если для любого $x \in [a, b)$ имеет место неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла

$$\int_a^b g(x)dx \quad (3)$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (4)$$

причём для их значений имеет место неравенство

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

В свою очередь, из расходимости интеграла (4) следует расходимость интеграла (3).

Пример 158. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{2 + 3 \cos x}{x^4} dx$.

Решение. Единственная особая точка $+\infty$. Имеем $\frac{2 + 3 \cos x}{x^4} \leq \frac{2 + 3}{x^4} = \frac{5}{x^4}$. При этом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{5}{3}$, т. е. сходится. По теореме сравнения это означает, что исходный интеграл также сходится. $\square$

Пример 159. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2 \cos^2 x}$.

Решение. Единственная особая точка $+\infty$. Так как при $x \geq 0$ справедливо $\frac{x}{1 + x^2 \cos^2 x} \geq \frac{x}{1 + x^2}$, а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2}$ расходится, то расходится и исследуемый интеграл. $\square$

В частности, следствиями теорем сравнения являются многие признаки сходимости несобственных интегралов. Рассмотрим эти признаки.

10.3.3 1-й признак сравнения, или признак абсолютной сходимости

Сформулируем признак абсолютной сходимости для интегралов 1-го рода. Для интегралов 2-го рода сформулируйте признак самостоятельно.

Теорема 7 (*первый признак сравнения, или признак абсолютной сходимости*). Пусть при любом $x \geq a$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq F(x)$. Тогда если интеграл $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ также сходится, причём абсолютно.¹

Замечание. Первый признак сравнения относится к *достаточным условиям*² и поэтому не даёт ответа на вопрос о сходимости интеграла в тех случаях, когда его условия не выполняются.

Пример 160. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^3)}{(1 + x^5)^2} dx$.

Решение. Поскольку при $x \geq 1$ имеем $\left| \frac{\cos(x^3)}{(1 + x^5)^2} \right| \leq \frac{1}{(1 + x^5)^2} < \frac{1}{x^{10}}$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{10}}$ сходится, то по 1-му признаку сравнения интеграл сходится (в том числе, абсолютно). $\square$

10.3.4 2-й признак сравнения

Пусть требуется выяснить сходимость (расходимость) несобственного интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

где положительная подынтегральная функция $f(x)$ может иметь достаточно сложный вид. В некоторых случаях удастся подобрать другую (более простого вида) положительную функцию $g(x)$, сходимость (расходимость) интеграла

¹Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится *абсолютно*, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$.

²Вообще, «признак» означает «достаточное условие».

от которой известна, и сравнить скорости их убывания при $x \rightarrow +\infty$. В зависимости от этого делается вывод о сходимости интеграла от функции $f(x)$. Следующий признак является предельным случаем теоремы сравнения.

Теорема 8' (*2-й признак сравнения для интегралов 1-го рода*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и положительны на $[a, +\infty)$, и существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $0 < k < +\infty$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно;
- 2) если $k = 0$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;
- 3) если $k = +\infty$, то из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Пусть теперь требуется выяснить сходимость (расходимость) несобственного интеграла 2-го рода

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где положительная подынтегральная функция $f(x)$ не ограничена в левой окрестности точки $x = b$. Сравним скорости роста при $x \rightarrow b - \varepsilon$ подынтегральной функции и некоторой функции $g(x)$, сходимость (расходимость) интеграла от которой известна (легко устанавливается). В зависимости от этого делается вывод о сходимости интеграла от функции $f(x)$.

Теорема 8'' (*2-й признак сравнения для интегралов 2-го рода*). Пусть функция $f(x)$ положительна и существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $0 < k < +\infty$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно;
- 2) если $k = 0$, то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$;
- 3) если $k = +\infty$, то из расходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^b f(x)dx$.

Рассмотрим примеры на применение 2-го признака сходимости.

Пример 161. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x - \frac{1}{2}}}$.

Решение. Единственная особая точка: $+\infty$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^3 + x - \frac{1}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = 1$, то по 2-му признаку сравнения интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x - \frac{1}{2}}}$ сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$, который сходится (доказывается непосредственным вычислением). $\square$

Пример 162. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$.

Решение. Сравним подынтегральную функцию с функцией $g(x) = 1/x$, интеграл от которой расходится в окрестности $+\infty$. Для этого рассмотрим предел отношения

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)/x}{1/x} = +\infty.$$

Согласно 2-му признаку сравнения, из расходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ следует расходимость данного интеграла. $\square$

Пример 163. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt[3]{x^5}} dx$.

Решение. Сравним подынтегральную функцию с функцией $g(x) = 1/x^{\frac{4}{3}}$, интеграл от которой сходится в окрестности $+\infty$. Для этого рассмотрим предел отношения

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)/\sqrt[3]{x^5}}{1/x^{\frac{4}{3}}} = 0.$$

Согласно 2-му признаку сравнения, из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$ следует сходимость данного интеграла. $\square$

10.3.5 3-й признак сравнения, или сравнение со степенью

Третий признак сравнения даёт возможность установить сходимость и расходимость несобственного интеграла в окрестности особой точки, сравнивая подынтегральную функцию с функцией степенного вида. У него единственный недостаток – не все функции допускают сравнение со степенной функцией (например, логарифмическая функция в правой окрестности нуля). Зато в тех случаях, когда он применим, этот признак имеет сразу три значимых преимущества:

во-первых, он относится к наиболее простым на практике признакам;

во-вторых, даёт как необходимое, так и достаточное условия сходимости несобственного интеграла (т. е. является критерием сходимости);

в-третьих, он формулируется для произвольных (необязательно положительных) функций и показывает абсолютную сходимость интеграла.

Теорема 9 (3-й признак сравнения, или признак сравнения со степенью).

1) Для несобственных интегралов 1-го рода. Если при $x \rightarrow +\infty$ функция f является бесконечно малой функцией порядка p по сравнению с бесконечно малой функцией $\frac{1}{x}$, т. е.

$$f(x) \sim \frac{C}{x^p} \quad (C \neq 0), \quad (1)$$

то при $p > 1$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а при $p \leq 1$ этот интеграл расходится.

2) Для несобственных интегралов 2-го рода. Если при $x \rightarrow b-0$ функция f является бесконечно большой функцией порядка p по сравнению с бесконечно большой функцией $\frac{1}{b-x}$, т. е.

$$f(x) \sim \frac{C}{(b-x)^p} \quad (C \neq 0), \quad (2)$$

то при $p < 1$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а при $p \geq 1$ – расходится.

Замечание. Признак можно сформулировать, используя введённое ранее понятие $O^*(\cdot)$ как функции, имеющей тот же порядок малости (роста) в окрестности особой точки.¹ С учётом этого условие (1) можно заменить на условие

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right),$$

а условие (2), соответственно, на условие

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right).$$

Пример 164. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}}$.

Решение. Так как $\frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ при $x \rightarrow +\infty$ и $p = \frac{3}{2} > 1$, то по 3-му признаку сравнения интеграл сходится. $\square$

¹Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ и $g(x) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда говорят, что при $x \rightarrow x_0$ функция $f(x)$ есть «О-большое со звёздочкой» от $g(x)$ и обозначают $f(x) = O^*(g(x))$, если существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0.$$

10.4 Задачи для самостоятельного решения

№412. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Доказать, что интеграл $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx$ расходится.

Используя определение, исследовать сходимость интеграла:

№413. [8, № 2334] $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0);$

№414. $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx;$

№415. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx;$

№416. $\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right] dx$, где $[\cdot]$ – целая часть числа;

№417. $\int_0^{+\infty} \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) dx$, где $\{\cdot\}$ – дробная часть числа;

№418. $\int_0^{+\infty} x \sin x dx;$

№419. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$

№420. [8, № 2356(б)] Средним значением функции $f(x)$ на промежутке $[0, +\infty)$ называется число $M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Найти среднее значение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на промежутке $[0, +\infty)$.

Используя признаки сравнения (теорему сравнения), исследовать сходимость интегралов:

№421. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^{10} x}{x\sqrt{x} + 3} dx.$ *Указание:* применить 1-й признак сравнения.

№422. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};$ *Указание:* воспользоваться 3-м признаком сравнения.

№423. $\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}}{x^{7/2}} dx;$ *Указание:* применить 1-й признак сравнения.

№424. $\int_1^3 \frac{x^2 dx}{(x-1)^5};$ *Указание:* воспользоваться 3-м признаком сравнения.

№425. $\int_1^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}};$ *Указание:* воспользоваться 3-м признаком сравнения.

№426. [17, с. 18] $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-x}}.$ *Указание:* воспользоваться 1-м признаком срав-

нения.

- №427. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx;$
- №428. $\int_0^{+\infty} 2^x \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{5^x} dx.$ *Указание:* применить 2-й признак сравнения.
- №429. $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx.$ *Указание:* применить 2-й признак сравнения.
- №430. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \sin \frac{1}{x} dx;$
- №431. [8, № 2358] $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1};$
- №432. [8, № 2359] $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}};$
- №433. $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^5} + \sqrt{x} + 1};$
- №434. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+2}} dx;$
- №435. [14, с. 18] $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^9 + x^2} + \sqrt[3]{x^8 - x^7}} dx;$
- №436. [14, с. 18] $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{x + \sqrt{x^5 + x^3}} dx;$
- №437. [8, № 2370(б)] $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}};$
- №438. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(e^x + 1)};$
- №439. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{\ln x}};$
- №440. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x^4 - x}};$
- №441. $\int_2^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot \cos^2 x}{\sqrt{x} \cdot \ln x} dx;$
- №442. $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot 2^{\cos x} dx;$
- №443. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\cos \frac{1}{\sqrt{x}})}{\ln^{10} x} dx;$
- №444. [17, с. 14] $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x + \sqrt[3]{x}};$
- №445. $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x - 13}{\sqrt{1+x^7} - \ln x} dx;$

$$\text{№446. [8, № 2376]} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - a_1|^{p_1} \cdot |x - a_2|^{p_2} \cdot \dots \cdot |x - a_n|^{p_n}} \quad (a_1 < a_2 < \dots < a_n);$$

№447. [8, № 2377] $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$, где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ – взаимно простые многочлены, соответственно, степеней m и n .

$$\text{№448. [8, № 2376.1]} \int_0^{+\infty} x^\alpha |x - 1|^\beta dx;$$

$$\text{№449. } \int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx. \quad \text{Указание: воспользоваться 2-м признаком сравнения.}$$

$$\text{№450. [8, № 2361]} \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (\text{гамма-функция Эйлера});$$

$$\text{№451. [17, с. 19]} \int_0^{+\infty} e^{-px} x^q dx \quad (p > 0, q > 0);$$

$$\text{№452. [17, с. 19]} \int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx \quad (0 < p \leq 1, q > 0);$$

$$\text{№453. [8, № 2363]} \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1 + x^n} dx \quad (n \geq 0);$$

$$\text{№454. [8, № 2364]} \int_0^{+\infty} \frac{\arctg(ax)}{x^n} dx \quad (a \neq 0);$$

$$\text{№455. [8, № 2366]} \int_0^{+\infty} \frac{x^m \cdot \arctg x}{2 + x^n} dx \quad (n \geq 0);$$

$$\text{№456. [8, № 2369]} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cdot \cos^q x};$$

$$\text{№457. [8, № 2370(a)] } \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1 - x^4}};$$

$$\text{№458. } \int_0^{+\infty} x^p \cdot \arctg \left(\frac{1}{x} \right) dx;$$

$$\text{№459. [8, № 2371]} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q};$$

$$\text{№460. [8, № 2365]} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx \quad (n \in \mathbb{R});$$

$$\text{№461. [8, № 2372]} \int_0^1 \frac{\ln x}{1 - x^2} dx;$$

$$\text{№462. [8, № 2373]} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{№463. [14, с. 18]} \int_0^1 \frac{\ln^3 x}{\sin^4(x-1)} dx;$$

№464. [17, с. 9] $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(x \ln x)^2};$

№465. [17, с. 22] $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - \ln(1+x^2)}{x^p} dx;$

№466. [8, № 2374] $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \cdot \ln^q x};$

№467. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^a + 1}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x} dx.$

Интегрируя по частям, вычислить интегралы:

№468. [8, № 2345] $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$ Положить $t = \operatorname{arctg} x$ ($t \in [0, \frac{\pi}{2})$).

№469. [8, № 2346] $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx$ ($a > 0, b \neq 0$);

№470. [8, № 2347] $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx$ ($a > 0, b \neq 0$). Как вычислить интеграл с помощью формулы Эйлера¹?

Используя замену переменной интегрирования, вычислить интегралы:

№471. [17, с. 9] Можно ли вычислить с помощью замены $t = x^2 + x - 2$ интеграл

$$\int_1^2 \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+x-2}}?$$

№472. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$ Указание: положить $x = \sin t$. Объясните, как выбрать область изменения t . Убедитесь, что такая подстановка удовлетворяет требованиям теоремы о замене переменной в несобственном интеграле.

№473. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}.$ Указание: положить $t = \sqrt{1-x^2}$.

№474. [8, № 2353] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$ (интегралы Эйлера);

№475. $\int_{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$ Указание: положить $t = \sqrt[3]{1+x^3}$.

№476. Доказать, что значение интеграла не зависит от величины α :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.$$

Используя разные приёмы, вычислить пределы:

¹Для студентов, знакомых с комплексными числами.

$$\text{№477. [8, № 2357(a)] } \lim_{x \rightarrow +0} \left(x \cdot \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \right);$$

$$\text{№478. [8, № 2357(б)] } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3};$$

№479. [8, № 2357(г)] $\lim_{x \rightarrow +0} \left(x^\alpha \cdot \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right)$, где $\alpha > 0$ и $f(t)$ – непрерывна на сегменте $[0, 1]$, $f(0) \neq 0$.

$$\text{№480. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^x \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt.$$

Разные задачи:

№481. Известно, что $f(x)$ – чётная интегрируемая функция, и что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 12, \quad \int_0^7 f(x) dx = 11, \quad \int_{-7}^3 f(x) dx = 8.$$

Найти $\int_3^{+\infty} f(x) dx$, $\int_0^3 f(x) dx$.

10.5 Ответы и решения

412. Предположим, от противного, что интеграл $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx$ сходится. Для любого $A > a$ справедливо равенство:

$$\int_a^A (f(x) + g(x))dx = \int_a^A f(x)dx + \int_a^A g(x)dx,$$

из которого следует, что $\int_a^A g(x)dx = \int_a^A (f(x) + g(x))dx - \int_a^A f(x)dx$. В последнем равенстве перейдём к пределу при $A \rightarrow +\infty$. Согласно условию задачи и сделанному предположению, предел каждого слагаемого в правой части существует, поэтому по теореме о пределе разности существует предел в правой части равенства. Следовательно, должен существовать и предел левой части, что противоречит условию.

413. На промежутке интегрирования имеется единственная особая точка $+\infty$. По определению несобственного интеграла имеем

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a}.$$

Интеграл принимает конечное значение и, значит, сходится.

414. $+\infty$ – единственная особая точка на промежутке интегрирования. По определению несобственного интеграла имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(e^x) \Big|_0^A = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Интеграл принимает конечное значение и, значит, сходится.

415. $x = 0$ – единственная особая точка. По определению несобственного интеграла имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sqrt[3]{\sin x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{3}{2} (\sin x)^{\frac{2}{3}} \Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Интеграл принимает конечное значение и, значит, сходится.

416. График функции $y = \frac{\sin x}{x}$ имеет вид (Рис. 109). Воспользуемся свойством аддитивности и разобьём промежутки интегрирования на участки, где целая часть раскрывается однозначно:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right] dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \left[\frac{\sin x}{x} \right] dx + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\pi+2\pi n}^{2\pi+2\pi n} \left[\frac{\sin x}{x} \right] dx = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} 0 dx + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\pi+2\pi n}^{2\pi+2\pi n} (-1) dx = - \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\pi+2\pi n}^{2\pi+2\pi n} dx = - \sum_{n=0}^{+\infty} \pi = -\infty, \end{aligned}$$

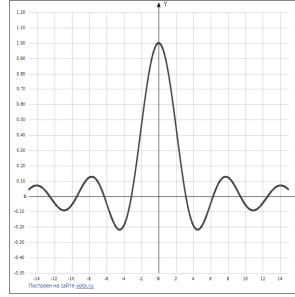


Рис. 109: График функции $y = \frac{\sin x}{x}$.

т. е. интеграл расходится.

417. Воспользуемся определением несобственного интеграла 1-го рода:

$$\int_0^{+\infty} \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) dx.$$

Если интеграл сходится, то этот предел не должен зависеть от выбора A . Однако, если взять $A = n$, $n \in \mathbb{N}$ (постройте график подынтегральной функции), то получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) dx = 0,$$

а если положить $A = n - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, то результат будет иным:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n-\frac{1}{2}} \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) dx = -\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

418. На промежутке интегрирования имеется единственная особая точка $+\infty$. По определению несобственного интеграла имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x \sin x dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-x \cos x + \int_0^A \cos x dx \right) \Big|_0^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (-A \cos A + \sin A). \end{aligned}$$

Так как последний предел не существует, то по определению несобственный интеграл расходится.

419. Подынтегральная функция непрерывна на промежутке интегрирования, поэтому единственная особая точка – это $+\infty$. По определению несобственного интеграла и используя подстановку $z = \sqrt{x}$, имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} 2 \int_1^{\sqrt{A}} \frac{dz}{z^2+1} = \\ &= 2 \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{A} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Интеграл принимает конечное значение и, значит, сходится.

420. Для вычисления среднего значения воспользуемся его определением и интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} M[\operatorname{arctg} x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \operatorname{arctg} t \, dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(t \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t \, dt}{1+t^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_0^x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2x} \right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

421. Подынтегральная функция непрерывна на промежутке интегрирования, поэтому единственная особая точка – это $+\infty$. Поскольку при всех $x \geq 1$ имеем $\left| \frac{\cos^{10} x}{x\sqrt{x}+3} \right| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то по 1-му признаку сравнения данный интеграл сходится (абсолютно).

422. На промежутке интегрирования имеется одна особая точка $x = 1$ (подынтегральная функция не ограничена в левой полукрестности этой точки, поэтому данный интеграл является несобственным 2-го рода). При

$x \rightarrow 1 - 0$ имеем $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}} = O^* \left(\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \right)$, и так как $\frac{1}{2} < 1$, то по 3-му признаку сравнения (со степенью) интеграл сходится.

423. Поскольку при $x \geq 2$ верно $\left| \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}}{x^{7/2}} \right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{7/2}}$, а интеграл $\frac{\pi}{2} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/2}}$ сходится, то по 1-му признаку сравнения интеграл сходится (абсолютно).

424. На промежутке интегрирования имеется одна особая точка $x = 1$ (подынтегральная функция неограничена в правой полукрестности этой точки, поэтому данный интеграл является несобственным 2-го рода). При $x \rightarrow 1 + 0$ имеем $\frac{x^2}{(x-1)^5} = O^* \left(\frac{1}{(x-1)^5} \right)$, и так как $5 > 1$, то по 3-му признаку сравнения (со степенью) интеграл расходится.

425. На промежутке интегрирования имеется одна особая точка $x = 1$ (подынтегральная функция неограничена в правой полуокрестности этой точки, поэтому данный интеграл является несобственным 2-го рода). При $x \rightarrow 1 + 0$ имеем $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = O^*\left(\frac{1}{(x-1)^{2/3}}\right)$, и так как $\frac{2}{3} < 1$, то по 3-му признаку сравнения (со степенью) интеграл сходится.

426. Подынтегральная функция положительна при $x \in [0, 1)$ и неограниченно возрастает как произведение двух положительных возрастающих функций. На промежутке интегрирования справедлива оценка $\frac{e^x}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{e}{\sqrt{1-x}}$, а интеграл $\int_0^1 \frac{e dx}{\sqrt{1-x}} = 2e$ сходится, поэтому исходный интеграл также сходится.

427. На промежутке интегрирования имеется одна особая точка $x = +\infty$ (интеграл является несобственным 1-го рода). При $x \rightarrow +\infty$ имеем $\operatorname{arctg} x \sim \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = O^*\left(\frac{1}{x^3}\right)$, и так как $3 > 1$, то по 3-му признаку сравнения (со степенью) интеграл сходится.

428. На промежутке интегрирования имеется одна особая точка $x = +\infty$. Так как при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\operatorname{tg} \frac{1}{5^x} \sim \frac{1}{5^x}$, то данный интеграл сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^x dx$, а последний из интегралов может быть вычислен (принимает конечное значение и, значит, сходится):

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \left(\frac{2}{5}\right)^x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln \frac{2}{5}} \right|_0^A = -\log_{\frac{2}{5}} e.$$

429. Положим $f(x) = \ln \frac{x^2+2}{x^2+1}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ и воспользуемся 2-м признаком сравнения:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1,$$

поэтому исходный интеграл сходится (расходится) одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, который сходится. Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$ также сходится.

430. На промежутке интегрирования две особые точки: $x = 1$ и $x = +\infty$, поэтому разобьём интеграл на два интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \sin \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \sin \frac{1}{x} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \sin \frac{1}{x} dx = I_1 + I_2.$$

1) Исследуем сходимость I_1 . При $x \rightarrow 1 + 0$ имеем $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \sin \frac{1}{x} \sim \frac{\sin 1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$, и поскольку $\frac{1}{2} < 1$, то по 3-му признаку сравнения интеграл I_1 сходится.

2) Исследуем сходимость I_2 . При $x \rightarrow +\infty$ имеем $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, поэтому $f(x) \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Так как $\frac{3}{2} > 1$, то по 3-му признаку сравнения интеграл I_2 сходится. Тогда исследуемый интеграл сходится как сумма двух сходящихся интегралов.

431. На промежутке интегрирования имеется одна особая точка $x = +\infty$. Преобразуем интеграл к виду

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Так как $\frac{1}{x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$, то по 3-му признаку сравнения (для несобственных интегралов 1-го рода) $p = 2 > 1$ – интеграл сходится.

432. На промежутке интегрирования имеется одна особая точка $x = +\infty$. При $x \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1}} = O^*\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\right)$, и так как $\frac{5}{3} > 1$, то по 3-му признаку сравнения интеграл сходится.

433. Единственная особая точка – это $+\infty$. При $x \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{x}{\sqrt{x^5} + \sqrt{x} + 1} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. По 3-му признаку сравнения, т. к. $p = \frac{3}{2} > 1$, то интеграл сходится.

434. Единственная особая точка – это $+\infty$. Преобразуем подынтегральную функцию с целью оценить скорость её изменения при $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3 + 2} \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{1}{x^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} \sim \frac{1}{2x^{\frac{5}{4}}}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{5}{4} > 1$, то интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{4}}}$ сходится, а значит, сходится и исследуемый интеграл.

435. Поскольку при $x \rightarrow +\infty$ имеем $x^3 - x + 1 \sim x^3$, $\sqrt{x^9 + x^2} \sim x^{\frac{9}{2}}$, $\sqrt[3]{x^8 - x^7} \sim x^{\frac{8}{3}}$, то $\sqrt{x^9 + x^2} + \sqrt[3]{x^8 - x^7} \sim x^{\frac{9}{2}}$, а потому исходный интеграл сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{9}{2}-3}}$, который сходится по 3-му признаку сравнения, т. к. $\frac{3}{2} > 1$.

436. При $x \rightarrow +\infty$ имеем $-\sqrt{x^2 - x + 1} \sim -x$, $\sin^2 x$ — ограниченная функция, а сумма ограниченной функции и бесконечно большой есть бесконечно большая функция, поэтому числитель ведёт себя как $-x$. Знаменатель $x + \sqrt{x^5 + x^3} \sim x^{\frac{5}{2}}$, поэтому подынтегральная функция эквивалентна $-\frac{1}{x^{3/2}}$. По 3-му признаку сравнения интеграл сходится.

437. На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 1$ и $x = +\infty$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

1) При $x \rightarrow +0$ имеем $x^3 + x \sim x$ и, следовательно, $\frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} = O^*\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 2-го рода) интеграл сходится, так как $\frac{1}{2} < 1$.

2) При $x \rightarrow +\infty$ имеем $x^3 + x \sim x^3$ и, следовательно, $\frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} = O^*\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$. Поэтому, так как $\frac{3}{2} > 1$, то по 3-му признаку сравнения интеграл сходится.

Ответ: интеграл сходится.

438. При $x \geq 1$ справедлива оценка: $0 \leq \frac{dx}{x^2(e^x + 1)} \leq \frac{1}{x^2}$. Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то по 1-му признаку сравнения (или по теореме сравнения) интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(e^x + 1)}$ также сходится.

439. На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 1$ и $x = +\infty$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

Разобьём интеграл на два интеграла: $I = \int_1^{+\infty} \dots = \int_1^2 \dots + \int_2^{+\infty} \dots = I_1 + I_2$.

1) При $x \rightarrow 1 + 0$ имеем $\ln x = \ln(1 + (x - 1)) \sim x - 1$, то $\frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{\ln x}} = O^*\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$, поэтому так как $\frac{1}{2} < 1$, то по 3-му признаку сравнения интеграл I_1 сходится.

2) При $x \rightarrow +\infty$ имеем $\left| \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{\ln x}} \right| < \frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, поэтому по первому признаку сравнения интеграл I_2 сходится.

Поскольку интегралы I_1 и I_2 сходятся, то отсюда заключаем, что интеграл I также сходится.

440. Разобьём интеграл на два интеграла: $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{\sqrt{x^4 - x}} = \int_1^2 \frac{\ln x \, dx}{\sqrt{x^4 - x}} + \int_2^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{\sqrt{x^4 - x}} = I_1 + I_2$. Поскольку существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln x}{\sqrt{x^4 - x}} = 0$, то точка $x = 1$ не является особой (функцию можно доопределить до непрерывной справа в этой точке), т. е. интеграл I_1 — собственный (сходится).

Единственная особая точка, таким образом, это $+\infty$. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки. При $x \rightarrow +\infty$ имеем $0 < \frac{\ln x}{\sqrt{x^4 - x}} = \frac{\ln x}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^3}}} \sim \frac{\ln x}{x^2} < \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Поскольку $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то по теореме сравнения сходится и интеграл I_2 . Следовательно, исходный интеграл также сходится.

441. Единственная особая точка – это $+\infty$. При $x \rightarrow +\infty$ имеем $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, поэтому

$$0 < \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot \cos^2 x}{\sqrt{x} \cdot \ln x} \sim \frac{\cos^2 x}{x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x} < \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Поскольку $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то по теореме сравнения сходится и исследуемый интеграл.

442. Единственная особая точка – это $+\infty$. При $x \rightarrow +\infty$ имеем $0 < \sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, $2^{\cos x} \geq \frac{1}{2}$, поэтому $0 < f(x) = \sin \frac{1}{x} \cdot 2^{\cos x} \sim \frac{1}{x} \cdot 2^{\cos x} \geq \frac{1}{2x}$. Поскольку $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ расходится, то по теореме сравнения расходится и исследуемый интеграл.

443. Единственная особая точка – это $+\infty$. При $x \rightarrow +\infty$ имеем $f(x) \leq 0$, т. к. $\ln(\cos \frac{1}{\sqrt{x}}) \leq 0$, поэтому

$$0 \leq -f(x) = -\frac{\ln(\cos \frac{1}{\sqrt{x}})}{\ln^{10} x} \sim \frac{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}}{\ln^{10} x} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\ln^{10} x} \sim \frac{1}{2x \cdot \ln^{10} x}.$$

Вычислим, применяя формулу Ньютона–Лейбница, интеграл

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{10} x} = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^{10} x} = -\frac{1}{9 \ln^9 x} \Big|_e^{+\infty} = \frac{1}{9}.$$

Поскольку последний интеграл сходится, то по теореме сравнения исходный интеграл также является сходящимся.

444. Особая точка $x = 0$. Воспользуемся 2-м признаком, положив $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Поскольку при $x \rightarrow 0$ $f(x) \sim g(x)$, то исходный интеграл сходится (расходится) одновременно с интегралом $\int_0^1 g(x) dx$, который сходится.

445. При $x \rightarrow +\infty$ справедливы оценки:

$$0 < f(x) = \frac{x \ln x - 13}{\sqrt{1 + x^7} - \ln x} \sim \frac{x \ln x}{\sqrt{1 + x^7}} \sim \frac{x \ln x}{x^{7/2}} \sim \frac{\ln x}{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$, то, начиная с некоторого x , эта дробь меньше 1, и

поэтому $\frac{\ln x}{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^2}$. Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то по 1-му признаку сравнения сходится и исследуемый интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x - 13}{\sqrt{1+x^7} - \ln x} dx$.

446. На промежутке интегрирования имеются особые точки $a_1, a_2, \dots, a_n$ (2-го рода) и ещё две точки $x = \pm\infty$ (1-го рода).

1) В окрестности точки $x = a_k$ ($k = \overline{1, n}$) подынтегральная функция $f(x) = O^*\left(\frac{1}{|x - a_k|^{p_k}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 2-го рода) интеграл сходится, если $p_k < 1$ (и расходится в противном случае).

2) При $x \rightarrow \infty$ имеем $f(x) = O^*\left(\frac{1}{|x|^{p_1+p_2+\dots+p_n}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 1-го рода) интеграл сходится, если $\sum_{k=1}^n p_k > 1$ (и расходится в противном случае).

Таким образом, интеграл сходится, когда одновременно $p_k < 1$ ($k = \overline{1, n}$) и $\sum_{k=1}^n p_k > 1$.

447. 1) Если на промежутке $[0, +\infty)$ многочлен $P_n(x)$ имеет корни $x = x_k$, то интеграл расходится (по 3-му признаку сравнения, для особых точек 2-го рода), так как в малой окрестности точки $x = x_k$ имеем $\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O^*\left(\frac{1}{(x - x_k)^{p_k}}\right)$, $p_k \geq 1$.

2) Если же многочлен $P_n(x)$ не имеет корней на промежутке $[0, +\infty)$, то единственная особая точка — это $+\infty$, тогда в её окрестности $\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O^*\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$, и для сходимости интеграла достаточно потребовать, чтобы $n - m > 1$.

Ответ: интеграл сходится, если многочлен $P_n(x)$ не имеет корней на промежутке $[0, +\infty)$ и $n - m > 1$.

448. На промежутке интегрирования имеются три особые точки: $x = 0$, $x = 1$ и $x = +\infty$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

1) При $x \rightarrow +0$ имеем $x^\alpha |x - 1|^\beta = O^*\left(\frac{1}{x^{-\alpha}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 2-го рода) интеграл сходится, если $-\alpha < 1$, т. е. при $\alpha > -1$ (и расходится в противном случае).

2) При $x \rightarrow 1$ имеем $x^\alpha |x - 1|^\beta = O^*\left(\frac{1}{|x - 1|^{-\beta}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 2-го рода) интеграл сходится, если $-\beta < 1$, т. е. при $\beta > -1$ (и расходится в противном случае).

3) При $x \rightarrow +\infty$ имеем $x^\alpha |x-1|^\beta = O^*\left(\frac{1}{x^{-(\alpha+\beta)}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 1-го рода) интеграл сходится, если $-(\alpha + \beta) > 1$, т. е. при $\alpha + \beta < -1$ (и расходится в противном случае).

Ответ: сходится при $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta < -1$ (и расходится в противном случае).

449. На промежутке интегрирования имеется одна особая точка $x = +\infty$ (интеграл является несобственным 1-го рода). Воспользуемся вторым признаком сравнения. А именно, сравним подынтегральную функцию $f(x) = x^5 e^{-x}$ с функцией $g(x) = \frac{1}{x^p}$, где $p > 1$, интеграл от которой сходится. Так как при любом $p \in \mathbb{R}$ (в том числе и при $p > 1$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 e^{-x}}{\frac{1}{x^p}} = 0,$$

то по 2-му признаку сравнения интеграл сходится.

450. На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

Разобьём интеграл по свойству аддитивности на два интеграла:

$$I = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^A x^{p-1} e^{-x} dx + \int_A^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = I_1 + I_2$$

и исследуем сходимость каждого из них.

1) При $x \rightarrow +0$ имеем $x^{p-1} e^{-x} = O^*\left(\frac{1}{x^{1-p}}\right)$. Следовательно, I_1 будет сходиться при $1 - p < 1$, т. е. при $p > 0$ (как несобственный интеграл 2-го рода).

2) При $x \rightarrow +\infty$ экспоненциальная функция e^{-x} убывает быстрее, чем любая функция вида $\frac{1}{x^k}$ ($k > 1$), т. е. $x^{p-1} e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^k}\right)$, поэтому I_2 при всех $p \in \mathbb{R}$ будет сходиться по 2-му признаку сравнения. Интеграл I сходится, когда одновременно сходятся интегралы I_1 и I_2 , т. е. при $p > 0$.

451. Единственная особая точка: $x = +\infty$. Воспользуемся 2-м признаком сравнения. Обозначим $f(x) = e^{-px} x^q$, $g(x) = e^{-\frac{p}{2}x}$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{p}{2}x} x^q = 0$ при $p > 0$, $\forall q \in \mathbb{R}$, то из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{2}x} dx = \frac{2}{p}$ следует сходимость исходного интеграла.

452. Сделав замену переменной $t = \ln(1/x)$ (непрерывно дифференцируемая строго монотонная функция), придём к интегралу $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx = \int_0^\infty e^{-pt} t^q dt$ (далее см. предыдущую задачу). Интеграл сходится.

453. На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

1) При $x \rightarrow +0$ имеем $\frac{x^m}{1+x^n} = O^*\left(\frac{1}{x^{-m}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 2-го рода) интеграл сходится, если $-m < 1$, т. е. при $m > -1$ (и расходится в противном случае).

2) При $x \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{x^m}{1+x^n} = O^*\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 1-го рода) интеграл сходится, если $n - m > 1$, т. е. при $m < n - 1$ (и расходится в противном случае).

Ответ: сходится при $-1 < m < n - 1$ (и расходится в противном случае).

454. На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

1) При $x \rightarrow +0$ имеем $\arctg(ax) \sim ax$ и, следовательно, $\frac{\arctg(ax)}{x^n} = O^*\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения интеграл сходится, если $n - 1 < 1$, т. е. при $n < 2$ и расходится в противном случае.

2) При $x \rightarrow +\infty$ имеем $\arctg(ax) \sim \frac{\pi}{2}$ (или $\arctg(ax) \sim -\frac{\pi}{2}$, в зависимости от знака a) и, следовательно, $\frac{\arctg(ax)}{x^n} = O^*\left(\frac{1}{x^n}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 1-го рода) интеграл сходится, если $n > 1$ и расходится в противном случае.

Ответ: сходится при $1 < n < 2$ и расходится в противном случае.

455. На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

1) При $x \rightarrow +0$ имеем $\arctg x \sim x$, $2 + x^n \sim 2$ и, следовательно, $\frac{x^m \arctg x}{2 + x^n} = O^*\left(\frac{1}{x^{-(m+1)}}, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 2-го рода) интеграл сходится, если $-(m+1) < 1$, т. е. при $m > -2$, и расходится в противном случае.$

2) При $x \rightarrow +\infty$ имеем $\arctg x \sim \frac{\pi}{2}$, $2 + x^n \sim x^n$ и, следовательно, $\frac{x^m \arctg x}{2 + x^n} = O^*\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 1-го рода) интеграл сходится, если $n - m > 1$, т. е. при $m < n - 1$ и расходится в противном случае.

Ответ: сходится при $-2 < m < n - 1$ (и расходится в противном случае).

456. На промежутке интегрирования имеются две особые точки 2-го рода: $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

1) При $x \rightarrow +0$ имеем $\sin x \sim x$, $\cos x \sim 1$ и, следовательно, $\frac{1}{\sin^p x \cdot \cos^q x} = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых

точек 2-го рода) интеграл сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$ и расходится в противном случае.

2) При $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ имеем $\sin x \sim 1$, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sim \frac{\pi}{2} - x$ и, следовательно, $\frac{1}{\sin^p x \cdot \cos^q x} = O^*\left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^q}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения интеграл сходится тогда и только тогда, когда $q < 1$ и расходится в противном случае.

Исходный интеграл сходится, когда выполняются оба условия, т. е. при $p < 1, q < 1$ (и расходится в противном случае).

457. На промежутке интегрирования имеются две особые точки 2-го рода: $x = 0$ и $x = 1$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

1) При $x \rightarrow +0$ имеем $\sqrt{1 - x^4} \sim 1$ и, следовательно, $\frac{x^n}{\sqrt{1 - x^4}} = O^*\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 2-го рода) интеграл сходится тогда и только тогда, когда $-n < 1$, т. е. $n > -1$, и расходится в противном случае.

2) При $x \rightarrow 1 - 0$ имеем

$$\sqrt{1 - x^4} = \sqrt{(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)} \sim \sqrt{1 - x}$$

и, следовательно, $\frac{x^n}{\sqrt{1 - x^4}} = O^*\left(\frac{1}{(1 - x)^{\frac{1}{2}}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения (для особых точек 2-го рода) интеграл сходится, поскольку $\frac{1}{2} < 1$.

Ответ: интеграл сходится при $n > -1$.

458. Сделав замену $t = \frac{1}{x}$, получим интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^{p+2}} dt = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t^{p+2}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^{p+2}} dt = I_1 + I_2.$$

Обозначим через $f(t)$ подынтегральную функцию.

1) Исследуем сходимость I_1 : при $t \rightarrow +0$ имеем $\operatorname{arctg} t \sim t$, $f(t) = O^*\left(\frac{1}{t^{p+1}}\right)$. По признаку сравнения со степенью интеграл сходится при $p+1 < 1$, т. е. $p < 0$, и расходится в противном случае.

2) Исследуем сходимость I_2 : при $t \rightarrow +\infty$ имеем $\operatorname{arctg} t \sim \frac{\pi}{2}$, $f(t) = O^*\left(\frac{1}{t^{p+2}}\right)$. По признаку сравнения со степенью интеграл сходится при $p+2 > 1$, т. е. $p > -1$, и расходится в противном случае.

3) I сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба интеграла I_1 и I_2 , т. е. при $p \in (-1, 0)$. Ответ: $p \in (-1, 0)$.

459. Для решения задачи рассмотрим три случая.

1) Если $p = q$, то получим интеграл $\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. При $x \rightarrow +0$ этот интеграл сходится, если $p < 1$, а при $x \rightarrow +\infty$ интеграл сходится, если $p > 1$. Следовательно, интеграл всегда расходится ($\forall p \in \mathbb{R}$).

2) Если $p < q$, то при $x \rightarrow +0$ имеем $\frac{1}{x^p + x^q} = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$, а при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{1}{x^p + x^q} = O^*\left(\frac{1}{x^q}\right)$, поэтому по 3-му признаку интеграл сходится, если одновременно $p < 1$, $q > 1$.

3) Если $p > q$, то аналогично получаем, что интеграл сходится, если $p > 1$, $q < 1$.

Ответ: сходится, если $\min(p, q) < 1$, $\max(p, q) > 1$ (в остальных случаях расходится).

460. На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

1) При $x \rightarrow +0$ имеем $\ln(1+x) \sim x$ и, следовательно, $\frac{\ln(1+x)}{x^n} = O^*\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$. По 3-му признаку сравнения интеграл сходится тогда и только тогда, когда $n-1 < 1$, т. е. при $n < 2$ (расходится при $n \geq 2$).

2) При $x \rightarrow +\infty$ воспользуемся 2-м признаком сравнения: сравним подинтегральную функцию со степенной функцией вида $\frac{1}{x^k}$ ($k > 1$). Выясним, при каких p равен нулю следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^n}}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{n-k}} = 0,$$

если $n-k > 0$, откуда $n > k > 1$. Следовательно, при $n > 1$ интеграл сходится.

Докажем, что при $n \leq 1$ интеграл расходится в окрестности $+\infty$. Также воспользуемся 2-м признаком сравнения и сравним подинтегральную функцию с функцией $\frac{1}{x^k}$ ($k \leq 1$), интеграл от которой расходится:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^n}}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{n-k}} = +\infty,$$

если $n-k \leq 0$, откуда $n \leq k \leq 1$. Следовательно, при $n \leq 1$ интеграл расходится.

Ответ: сходится при $1 < n < 2$ и расходится в остальных случаях.

461. Покажем, что точка $x = 1$ не является особой, так как функция ограничена в левой полуокрестности этой точки. В самом деле, поскольку при $x \rightarrow 1-0$ $\ln x \sim x-1$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, на промежутке интегрирования имеется лишь одна особая точка (2-го рода): $x = 0$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности неё.

При $x \rightarrow +0$ воспользуемся вторым признаком сравнения и сравним подынтегральную функцию со степенной функцией $g(x) = 1/x^k$, где $0 < k < 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\ln x}{1-x^2}}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{\ln x}{x^{-k}} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-k}} \stackrel{[1]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-k \cdot x^{-(k+1)}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^k}{-k} = 0.$$

В этом случае из сходимости интеграла от $g(x)$ следует сходимость исходного интеграла (подынтегральная функция в окрестности точки $x = 0$ имеет порядок роста ниже, чем бесконечно большая в этой окрестности функция $g(x) = 1/x^k$, где $0 < k < 1$). Ответ: интеграл сходится.

462. На промежутке интегрирования имеется лишь одна особая точка (2-го рода) $x = 0$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности этой точки.

При $x \rightarrow +0$ воспользуемся 2-м признаком сравнения и сравним подынтегральную функцию со степенной функцией $g(x) = 1/x^k$, где $k < 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-k}} =$$

(потребуем дополнительно, чтобы $k > \frac{1}{2}$, тогда раскроем неопределённость по правилу Лопиталя)

$$\stackrel{[1]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{ctg} x}{(\frac{1}{2} - k)x^{-k-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{k+\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2} - k) \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{k+\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2} - k)x} = 0.$$

Получили, что если выбрать $\frac{1}{2} < k < 1$, то порядок роста при $x \rightarrow +0$ подынтегральной функции ниже, чем порядок роста бесконечно большой функции $g(x) = \frac{1}{x^k}$, интеграл от которой сходится. По 2-му признаку сравнения исходный интеграл сходится.

463. На промежутке интегрирования имеются две особые точки 2-го рода: $x = 0$ и $x = 1$. Разобьём интеграл на два интеграла и исследуем сходимость каждого из них:

$$\int_0^1 \frac{\ln^3 x}{\sin^4(x-1)} dx = \int_0^{1/2} \frac{\ln^3 x}{\sin^4(x-1)} dx + \int_{1/2}^1 \frac{\ln^3 x}{\sin^4(x-1)} dx = I_1 + I_2.$$

1) При $x \rightarrow +0$ имеем $\sin^4(x-1) = \operatorname{const} \neq 0$, т. е. интеграл I_1 сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_0^{1/2} \ln^3 x dx$. Воспользуемся 2-м признаком сравнения. Пусть $f(x) = \ln^3 x$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^3 x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$,

в этом случае из сходимости интеграла $\int_0^{1/2} g(x)dx$ (а он сходится) следует сходимость $\int_0^{1/2} f(x)dx$, т. е. интеграл I_1 сходится.

2) При $x \rightarrow 1 - 0$ имеем $\ln x \sim x - 1$, $\sin^4(x - 1) \sim (x - 1)^4$, т. е. подынтегральная функция ведёт себя как $\frac{1}{x-1}$, но такой интеграл расходится. Итак, интеграл I_2 расходится. Но тогда исходный интеграл расходится как сумма сходящегося и расходящегося интегралов.

464. Особая точка: $x = 0$. Заметим, что при $x \in (0, \frac{1}{2}]$ выполнены неравенства $0 < \frac{1}{x|\ln x|} < \frac{1}{(x \ln x)^2}$, но интеграл $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x|\ln x|}$ расходится, поэтому по теореме сравнения расходится и мажорирующий его интеграл $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(x \ln x)^2}$.

465. На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

1) При $x \rightarrow +0$ имеем $\frac{x^2 - \ln(1 + x^2)}{x^p} = \frac{1}{x^p} \left(\frac{x^4}{2} + o(x^4) \right)$, поэтому интеграл сходится при $p - 4 < 1$, т. е. $p < 5$.

2) Пусть $x \rightarrow +\infty$. Перепишем подынтегральную функцию в виде $\frac{x^2 - \ln(1 + x^2)}{x^p} = \frac{1 - \frac{1}{x^2} \ln(1 + x^2)}{x^{p-2}} \sim \frac{1}{x^{p-2}}$, поэтому интеграл будет сходиться при $p - 2 > 1$, т. е. $p > 3$. Окончательно, интеграл сходится при $3 < p < 5$.

466. На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 1$ и $x = +\infty$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

1) При $x \rightarrow 1 + 0$ имеем $\ln x \sim x - 1$ и, следовательно, $\frac{1}{x^p \cdot \ln^q x} = O^* \left(\frac{1}{(x - 1)^q} \right)$. По 3-му признаку сравнения в окрестности этой точки интеграл сходится тогда и только тогда, когда $q < 1$ (при любом p) и расходится при $q \geq 1$.

2) При $x \rightarrow +\infty$ воспользуемся 2-м признаком сравнения: сравним подынтегральную функцию со степенной функцией вида $\frac{1}{x^k}$ ($k > 1$). Выясним, при каких p равен нулю следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^p \cdot \ln^q x}}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-k} \cdot \ln^q x} = 0,$$

если $p - k > 0$, откуда $p > k > 1$, поэтому при $p > 1$ и $\forall q \in \mathbb{R}$ интеграл сходится.

Покажем, что при $p < 1$ и $\forall q \in \mathbb{R}$ интеграл расходится. Также воспользуемся 2-м признаком сравнения и сравним подынтегральную функцию со степенной функцией вида $\frac{1}{x^k}$ ($k \leq 1$), интеграл от которой расходится. Выясним,

при каких p равен бесконечности следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^p \cdot \ln^q x}}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-k} \cdot \ln^q x} = +\infty,$$

если $p - k < 0$, откуда $p < k \leq 1$, поэтому при $p < 1$ и $\forall q \in \mathbb{R}$ интеграл расходится. Наконец, при $p = 1$ имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^q x} = \int_1^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^q x} = \frac{1}{(1-q) \ln^{q-1} x} \Big|_1^{+\infty}.$$

Этот интеграл расходится $\forall q \in \mathbb{R}$.

Ответ: сходится при $p > 1$ и $q < 1$ (и расходится в противном случае).

467. 1) При $x \rightarrow +\infty$ и $a > 0$ имеем $\frac{1}{\sqrt{x^a + 1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$. Поэтому подынтегральная функция $f(x) \sim \frac{1}{x^{\frac{a}{2}+1}}$, и поскольку $\frac{a}{2} + 1 > 1$, то по 3-му признаку сравнения интеграл сходится.

2) При $x \rightarrow +\infty$ и $a \leq 0$ имеем $\frac{1}{\sqrt{x^a + 1}} = o(1)$, $\operatorname{tg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$. Покажем, используя 2-й признак сравнения, что данный интеграл будет расходиться. В качестве функции сравнения возьмём $g(x) = \frac{1}{x}$. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^a + 1}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{если } a = 0, \\ 1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Это означает, что интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^a + 1}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x} dx$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ сходятся и расходятся одновременно. Так как второй из них расходится, то и исследуемый интеграл также расходится.

Ответ: интеграл сходится при $a > 0$ и расходится в противном случае.

468. Сделаем замену $t = \operatorname{arctg} x$ ($t \in [0, \frac{\pi}{2})$), тогда $x = \operatorname{tg} t$, $1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$, в результате приходим к интегралу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt = \sin t \cdot t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{\pi}{2} + \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

469. Интегрируя последовательно два раза по частям, имеем

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{1}{b} \sin(bx) \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{a}{b} \sin(bx) \cdot e^{-ax} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{b} \int_0^{+\infty} \sin(bx) \cdot e^{-ax} dx = \frac{a}{b} \left(-\frac{1}{b} \cos(bx) \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} - \frac{a}{b} \cdot I \right) = \frac{a}{b} \left(\frac{1}{b} - \frac{a}{b} \cdot I \right) \\
&\Rightarrow I = \frac{a}{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

470. Задача решается аналогично предыдущей. Ответ: $\frac{b}{a^2 + b^2}$. Для студентов, знакомых с комплексными числами, приведём соответствующий способ решения. По формуле Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, откуда для мнимой части получаем $\sin(bx) = \operatorname{Im} e^{ibx}$, тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\begin{aligned}
&\int_0^A e^{-ax} \sin(bx) dx = \operatorname{Im} \int_0^A e^{-ax} e^{ibx} dx = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{-a + ib} e^{(-a+ib)x} \right) \Big|_0^A = \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{-a - ib}{a^2 + b^2} e^{(-a+ib)A} + \frac{a + ib}{a^2 + b^2} \right) = \frac{b}{a^2 + b^2} - \frac{e^{-aA}}{a^2 + b^2} (a \sin(bA) + b \cos(bA)).
\end{aligned}$$

Предел данного выражения при $A \rightarrow +\infty$ равен $\frac{b}{a^2 + b^2}$.

471. Особая точка: $x = 1$. Подынтегральная функция определена и непрерывна на полуинтервале $(1, 2]$. Сделаем замену $t = x^2 + x - 2$. Это возможно, т. к. функция $t = x^2 + x - 2$ непрерывно дифференцируема и строго монотонна на $(1, 2]$. Имеем $(2x + 1)dx = dt$, $t(1) = 0$, $t(2) = 4$, тогда

$$\int_1^2 \frac{(2x + 1)dx}{\sqrt{x^2 + x - 2}} = \int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_0^4 = 4.$$

472. Функция $x = \sin t$ непрерывна вместе со своей производной на всём множестве $t \in \mathbb{R}$. Значениям $0 \leq x \leq 1$ соответствуют промежутки $2\pi n \leq t \leq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Из этого бесконечного множества промежутков выберем сегмент $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, в пределах которого $x(t)$ монотонно возрастает, проходя по одному разу все значения от 0 до 1, т. е. каждому значению t отвечает единственное значение $x \in [0, 1]$, и наоборот (взаимно однозначное соответствие между множествами значений x и t). Поэтому такая подстановка корректна (удовлетворяет требованиям к подстановкам в условиях теоремы о замене переменной). Реализуя подстановку, получим

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cdot \cos t dt.$$

Так как при $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ функция $\cos t$ неотрицательна, то модуль можно опустить

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

473. Положим $t = \sqrt{1 - x^2}$, тогда $x^2 = 1 - t^2$, $xdx = -tdt$ и

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}} &= - \int_1^0 \frac{tdt}{\sqrt{1 - t}} = \int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1 - t}} = \int_0^1 \frac{1 + (t - 1)}{\sqrt{1 - t}} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t}} - \int_0^1 \sqrt{1 - t} dt = - \int_0^1 \frac{d(1 - t)}{\sqrt{1 - t}} + \int_0^1 \sqrt{1 - t} d(1 - t) = \\ &= \left(-2\sqrt{1 - t} + \frac{2}{3}\sqrt{(1 - t)^3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

474. Обозначим интегралы, соответственно, как I_1 и I_2 , это несобственные интегралы 2-го рода (функция $\ln(\sin x)$ имеет особую точку $x = 0$, а $\ln(\cos x)$ — особую точку $x = \frac{\pi}{2}$).

1) Покажем, что $I_1 = I_2$. Положим $t = \frac{\pi}{2} - x$ в I_2 :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt = I_1.$$

2) Вычислим эти интегралы:

$$2I_1 = I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx =$$

(положим в первом интеграле $t = 2x$)

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t) dt \right) - \frac{\pi}{2} \ln 2 =$$

(во втором из интегралов сделаем замену $z = \pi - t$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin(\pi - z)) (-dz) \right) - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin z) dz \right) - \frac{\pi}{2} \ln 2 = I_1 - \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Получили, что $2I_1 = I_1 - \frac{\pi}{2} \ln 2$, т. е. $I_1 = I_2 = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

475. Несмотря на то, что интеграл изначально собственный, используемая замена переменной приводит к появлению двух (сходящихся) несобственных интегралов. Рассмотрим подробнее. Применяя метод интегрирования биномиального дифференциала, выполним рекомендуемую замену $t = \sqrt[3]{1 + x^{-3}}$. Функция $t(x)$ непрерывно дифференцируема на полуинтервалах $[-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$ и

$(0, 1]$, точка $x = 0$ является особой точкой $t(x)$, причём $\lim_{x \rightarrow -0} t(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} t(x) = +\infty$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} &= \int_{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = - \int_{-1}^{-\infty} \frac{tdt}{t^3-1} - \int_{+\infty}^{\sqrt[3]{2}} \frac{tdt}{t^3-1} = \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{tdt}{t^3-1} + \int_{\sqrt[3]{2}}^{+\infty} \frac{tdt}{t^3-1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(t-1)^3}{t^3-1} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_a^{-1} + \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(t-1)^3}{t^3-1} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_{\sqrt[3]{2}}^b = \\ &= \frac{1}{6} \ln 4 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \ln(\sqrt[3]{2}-1)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{5\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{2}-1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

476. Имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = I_1 + I_2.$$

Сделаем в первом интеграле замену $x = \frac{1}{y}$, тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})} = \int_1^{+\infty} \frac{y^\alpha dy}{(1+y^2)(1+y^\alpha)}, \\ I_1 + I_2 &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} + \frac{1}{1+x^\alpha} \right) \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \end{aligned}$$

что не зависит от α .

477. Выясним поведение $\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$ при $x \rightarrow +0$. По 1-й теореме о среднем имеем:

$$\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt = \cos \xi \cdot \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \cos \xi \left(\frac{1}{x} - 1 \right), \quad \text{где } x < \xi < 1$$

$(\cos 1 < \cos \xi < \cos x)$. Так как при $x \rightarrow +0$ имеем $\left(\frac{1}{x} - 1\right) \rightarrow +\infty$, то это бесконечно большая функция. Следовательно, данный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \right)$

представляет собой неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Чтобы раскрыть эту неопределённость, преобразуем её в неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ и затем воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \left(x \cdot \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \right) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{\cos x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1. \end{aligned}$$

478. Имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой воспользуемся правилом Лопиталя (производная интеграла с переменным верхним пределом $(\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt)_x' = \sqrt{1+x^4}$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt)_x'}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

479. Заметим, что несобственный интеграл в числите является расходящимся, что означает неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия неопределённости воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right)_x'}{(x^{-\alpha})'_x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}}{-\alpha \cdot x^{-(\alpha+1)}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{\alpha} = \frac{f(0)}{\alpha}$$

(последний переход – в силу непрерывности $f(x)$ в точке $x = 0$).

480. Покажем, что интеграл $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt$ расходится. В самом деле, при $t \rightarrow +\infty$ имеем $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$, а интеграл от последней из функций расходится по признаку сравнения со степенью. Воспользуемся 2-м правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_1^x \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt \right)_x'}{(\sqrt{x})'_x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2.$$

481. 1-й способ. В силу чётности f имеем

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 6, \quad \int_0^7 f(x) dx = \int_{-7}^0 f(x) dx,$$

тогда по свойству аддитивности получаем

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_{-7}^3 f(x) dx - \int_{-7}^0 f(x) dx = \int_{-7}^3 f(x) dx - \int_0^7 f(x) dx = 8 - 11 = -3,$$

$$\int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 6 - (-3) = 9.$$

2-й способ. Обозначим

$$A = \int_{-\infty}^{-7} f(x)dx, \quad B = \int_{-7}^{-3} f(x)dx, \quad C = \int_{-3}^0 f(x)dx.$$

В силу чётности f имеем $\int_7^{+\infty} f(x)dx = A$, $\int_3^7 f(x)dx = B$, $\int_0^3 f(x)dx = C$. Тогда условие задачи можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2(A + B + C) = 12,$$

$$\int_0^7 f(x)dx = C + B = 11, \quad \int_{-7}^3 f(x)dx = B + 2C.$$

Итак, имеем систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A + B + C = 6, \\ B + C = 11, \\ B + 2C = 8, \end{cases}$$

решая которую, находим $A = -5$, $B = 14$, $C = -3$. Тогда

$$\int_3^{+\infty} f(x)dx = A + B = 9, \quad \int_0^3 f(x)dx = C = -3.$$

11 СЕМИНАР: Исследование сходимости несобственных интегралов (продолжение): критерий Коши, признаки Дирихле и Абеля, формула Тейлора и др. приёмы

«Учись так, как будто постоянно ощущаешь, что знаний не хватает, и так, как будто все время боишься их растерять».

Конфуций (551 до н. э. – 479 до н. э.) – древний мыслитель и философ Китая.

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Выше мы рассмотрели теорему сравнения и несколько признаков сходимости для несобственных интегралов 1-го и 2-го рода, в основном, для знакопостоянных функций. В продолжение этой темы мы вначале познакомимся с наиболее известными несобственными интегралами, затем обратимся к критерию Коши сходимости несобственных интегралов и признакам сходимости интегралов от знакопеременных функций, а также изучим возможности применения формулы Тейлора для исследования сходимости интегралов в окрестностях их особых точек.

11.1 Известные несобственные интегралы

Приведём ниже наиболее известные в математике несобственные интегралы.

1. Интегральные синус и косинус:

$$si\,x = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad (x \geq 0), \quad ci\,x = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0).$$

2. Интегралы Френеля¹:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

¹Огюстен Жан Френель (фр. Augustin-Jean Fresnel; 1788–1827) – французский физик, один из создателей волновой теории света.

3. Интегралы Эйлера²:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

4. Интеграл Дирихле¹:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn} \alpha.$$

5. Интегралы Лапласа²:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot e^{-|\alpha|}.$$

6. Интеграл Эйлера–Пуассона:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7. Гамма-функция ($p \in \mathbb{R}$, $p > 0$):³

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

В частности, при $n \in \mathbb{N}$ $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

8. Бета-функция ($p > 0$, $q > 0$):

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

²Leonhard Euler (1707–1783) — швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук). Эйлер — автор более чем 850 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и другим областям.

¹Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) — немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел. Член Берлинской и многих других академий наук, в том числе Петербургской (1837).

²Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) — французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей. Лаплас состоял членом шести Академий наук и Королевских обществ, в том числе Петербургской Академии (1802).

³Гамма-функция — математическая функция, которая расширяет понятие факториала на нецелые действительные, а также комплексные числа. Была введена Леонардом Эйлером.

9. Интеграл Раа́бе ($a > 0$):

$$\int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx = a(\ln a - 1) + \ln \sqrt{2\pi}.$$

10. Интегралы Фрулла́ни ($a, b > 0$).⁴

а) Если $f(x) \in C[0, +\infty)$, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \cdot \ln \frac{b}{a};$$

б) если $f(x) \in C[0, +\infty)$, $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ сходится $\forall A > 0$, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

11.2 Критерий Коши сходимости несобственных интегралов

«Когда мы запустили спутник, Эйзенхауэр и Кеннеди сказали, что русские выиграли космическую гонку не на ракетном полигоне, а за школьной партой. Когда я в 1970 году читал лекции в одном из американских университетов, я был поражен крайне низкому уровню американских студентов 1-2 курсов.

Сейчас, когда я слышу ответы некоторых школьников в ЕГЭ, я уже поражаюсь в другую сторону».

Жорес Иванович Алферов (1930–2019) – советский и российский учёный-физик, политический деятель.

Лауреат Нобелевской премии по физике.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема в собственном смысле на любом сегменте $[a, A]$ ($\forall A > a$).

Теорема 1 (*критерий Коши сходимости несобственных интегралов 1-го рода*). Для сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε нашлось такое отвечающее ему число $A_0 = A_0(\varepsilon) > a$, что при любых $A', A'' \geq A_0$ справедливо неравенство

$$\left| \int_a^{A'} f(x) dx - \int_a^{A''} f(x) dx \right| = \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

⁴Giuliano Frullani (1795–1834) – итальянский математик, известен работами в области определённых интегралов и бесконечных рядов.

Как следствие получаем следующую теорему.

Теорема 1 (*критерий Коши расходимости несобственных интегралов 1-го рода*). Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого (сколь угодно большого) числа $A_0 > a$ найдутся такие два числа $A', A'' \geq A_0$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \int_a^{A'} f(x)dx - \int_a^{A''} f(x)dx \right| = \left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| \geq \varepsilon.$$

Приведём аналогичные формулировки данного критерия для несобственных интегралов 2-го рода (b – особая точка).

Теорема 2 (*критерий Коши сходимости несобственных интегралов 2-го рода*). Для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ существовало такое отвечающее ему число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любых η', η'' таких, что $0 < \eta' < \delta$, $0 < \eta'' < \delta$, выполнялось неравенство

$$\left| \int_a^{b-\eta'} f(x)dx - \int_a^{b-\eta''} f(x)dx \right| = \left| \int_{b-\eta'}^{b-\eta''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Из данной теоремы вытекает следующее утверждение.

Теорема 2 (*критерий Коши расходимости несобственных интегралов 2-го рода*). Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится тогда и только тогда, когда найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что для любого (сколь угодно малого) числа $\delta > 0$ найдутся такие числа η', η'' , удовлетворяющие неравенствам $0 < \eta' < \delta$, $0 < \eta'' < \delta$ такие, что выполняется неравенство

$$\left| \int_a^{b-\eta'} f(x)dx - \int_a^{b-\eta''} f(x)dx \right| = \left| \int_{b-\eta'}^{b-\eta''} f(x)dx \right| \geq \varepsilon.$$

11.3 Признак Дирихле

«Теорема (*признак Дирихле*). Пусть при любом $x \in [a, +\infty)$ первообразная $F(x) = \int_a^x f(u)du$ ограничена, и пусть функция $g(x)$ неотрицательна и не возрастающая стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Тогда интеграл $I = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

«Вот Интеграл. Увы, Несобственный.
Из рода Первых, рос в беспечности.
Он в будни сходится, как Собственный,
А в праздник — рвётся к бесконечности!»

*Черты двух функций обезличены,
Одна из них печально-грустная:
Первообразной ограниченность —
Что стол в неделю мясопустную.
С другою, долг вернувши карточный,
К нулю финансовому тащимся...
По Дирихле, того достаточно,
Чтоб видеть Интеграл — сходящимся».*
Е.В. Хорошилова, 2007

Специальные признаки сравнения используются при исследовании на сходимость интегралов от знакопеременных функций вида

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx, \quad (1)$$

в том числе в тех случаях, когда данный интеграл сходится, но не обязательно абсолютно. Они основаны на применении 2-й теоремы о среднем и аналогичны признакам Дирихле¹ и Абе́ля² сходимости бесконечных рядов, поэтому их часто связывают с именами этих математиков.

Пусть на промежутке интегрирования имеется единственная особая точка $x = +\infty$.

Теорема 3' (*признак Дирихле́, для интегралов 1-го рода*).

Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном сегменте $[a, A]$ ($A > a$) и $\exists K$ (не зависящее от A):

$$\left| \int_a^A f(x)dx \right| \leq K$$

(т. е. $f(x)$ имеет ограниченную первообразную);³

2) функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ и имеет непрерывную производную.

¹Петер Густав *Лежён-Дирихле* (1805–1859) – немецкий математик.

²Нильс Генрих *Абель* (1802–1829) – норвежский математик.

³Условие монотонности в признаке Дирихле может быть заменено на условие ограниченности вариации. Пусть на замкнутом конечном или бесконечном промежутке $[a, b]$ имеется функция $g(x)$, принимающая в каждой точке этого промежутка конечное значение. Пусть T – некоторое разбиение $[a, b]$ на части $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Составим сумму $S_T = \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})|$. Если при всевозможных разбиениях T множество значений этой суммы есть ограниченное множество, то функция $g(x)$ называется функцией *ограниченной вариации* на промежутке $[a, b]$. Условие 2) влечёт за собой интегрируемость функции $g(x)$ на отрезке $[a, A]$ ($\forall A > a$).

Тогда интеграл (1) сходится.

Сформулируем признак Дирихле для особых точек 2-го рода.

Теорема 3'' (*признак Дирихле, для интегралов 2-го рода*).

Пусть выполнены условия:

1) для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b - \varepsilon]$ и $\exists K$ (не зависящее от ε):

$$\left| \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \right| \leq K;$$

2) функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow b - 0$ и имеет непрерывную производную.

Тогда интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Замечание 1. Требования теорем можно ослабить, не требуя непрерывности производной $g'(x)$.

Замечание 2. Признак Дирихле является достаточным признаком, и поэтому не даёт ответа на вопрос о сходимости интеграла в тех случаях, когда его условия не выполняются.

Пример 165. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Решение. *1-й способ.* Представим интеграл в виде $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} \cdot \sqrt{x^3} dx$ и воспользуемся теоремой 3'', положив $f(x) = \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^3}$. Тогда имеем:

1) функция $f(x)$ интегрируема на любом полуинтервале $(\varepsilon, 1]$, где $0 < \varepsilon < 1$, причём её первообразная ограничена (в силу ограниченности синуса):

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx = - \int_{\varepsilon}^1 \cos \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = - \sin \frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = - \left(\sin 1 - \sin \frac{1}{\varepsilon} \right);$$

2) при $x \rightarrow +0$ функция $g(x) = \sqrt{x^3}$ монотонно стремится к нулю. Поэтому интеграл сходится по признаку Дирихле.

2-й способ. Сделав замену $t = 1/x$, приходим к несобственному интегралу 1-го рода $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt$, который сходится по признаку Дирихле, поскольку: 1) при $t \rightarrow +\infty$ имеем $\forall A \geq 1$ ограниченность интеграла $\left| \int_1^A \cos t dt \right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2$; 2) функция $\frac{1}{t^{3/2}}$ монотонно стремится к 0. Этот способ проще. $\square$

Обратимся к важному классу интегралов и исследуем его сходимость.

Пример 166. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx.$$

Решение. На промежутке интегрирования имеем две особые точки, поэтому разобьём интеграл на два интеграла и исследуем сходимость каждого:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x^p} dx + \int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = I_1 + I_2.$$

1) Исследуем сходимость интеграла I_1 . При $x \rightarrow +0$ имеем $\sin x \sim x$, поэтому для подынтегральной функции получаем $\frac{\sin x}{x^p} = O^*\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения интеграл I_1 сходится при $p-1 < 1$, т. е. $p < 2$, и расходится при $p \geq 2$.

2) Исследуем сходимость интеграла I_2 при $p < 2$. Если $p > 0$, то при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\forall B \geq A$ ограниченность интеграла

$$\left| \int_A^B \sin x dx \right| = |-\cos B + \cos A| \leq 2,$$

и при этом функция $1/x^p$ монотонно стремится к 0. По признаку Дирихле заключаем, что при $p > 0$ интеграл I_2 сходится.

Покажем, используя критерий Коши расходимости интеграла, что при $p \leq 0$ интеграл I_2 расходится. Требуется показать, что найдётся $\varepsilon > 0$: $\forall B \geq A \exists B', B'' > B$ такие, что $\left| \int_{B'}^{B''} \frac{\sin x}{x} dx \right| > \varepsilon$. В самом деле, так как $\forall B \geq A \exists n \in \mathbb{N} : 2\pi n > B$, то возьмём в качестве B' и B'' , соответственно, числа $2\pi n$ и $\pi + 2\pi n$. Рассмотрим интеграл

$$I = \left| \int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} x^{-p} \sin x dx \right|.$$

Функция x^{-p} непрерывна на сегменте $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, а функция $\sin x$ непрерывна и не меняет своего знака на этом сегменте, поэтому по 1-й теореме о среднем имеем

$$I = \xi^{-p} \left| \int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \sin x dx \right| = 2 \cdot \xi^{-p},$$

где $2\pi n < \xi < \pi + 2\pi n$. При достаточно больших n имеем $\xi > 1$, а $-p \geq 0$, поэтому $\xi^{-p} > 1$ и, значит, $I > 2$. Но тогда для любого положительного $\varepsilon \leq 2$ выполнен критерий Коши расходимости интеграла. Таким образом, интеграл I_2 расходится при $p \leq 0$.

Исходный интеграл сходится, когда сходятся оба интеграла I_1 и I_2 .

Ответ: при $0 < p < 2$ интеграл сходится, в противном случае расходится. $\square$

Пример 167. Исследовать сходимость интеграла

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Решение. Поскольку в нуле подынтегральную функцию можно доопределить до непрерывной, то единственная особая точка – это $+\infty$. Покажем, что интеграл расходится. Пусть $A > 0$. Проинтегрировав в пределах от A до $+\infty$ неравенство

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \sin^2 x \leq |\sin x|,$$

получим оценку снизу для интеграла I :

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx \leq \int_A^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = I,$$

где интеграл $I_1 = \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, а интеграл $I_2 = \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ сходится (по признаку Дирихле). Но тогда их разность расходится. По теореме сравнения это означает, что исследуемый интеграл расходится (как мажорирующий расходящийся). $\square$

Рассмотрим ещё один – более сложный – пример, в котором признак Дирихле даёт возможность найти лишь часть значений параметра p , при которых интеграл сходится, а для нахождения оставшихся значений параметра проводится дополнительное исследование. В результате удаётся найти все значения параметра, при которых интеграл сходится.

Пример 168. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx, \quad \text{где } A > 0, p > 0.$$

Решение. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^p + \sin x}$. Очевидно, что интеграл от синуса есть ограниченная функция ($|\int_A^B \sin x dx| \leq 2 \quad \forall B > A$) и $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Однако функция $g(x)$ стремится к нулю монотонно лишь в случае $p \geq 1$. Поэтому признак Дирихле гарантирует сходимость интеграла лишь для $p \geq 1$ и оставляет вопрос открытым для $0 < p < 1$.

Более детальное исследование показывает, что рассматриваемый интеграл сходится при $p > 1/2$ и расходится при других значениях p . В самом деле, представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\sin x}{x^p + \sin x} = \frac{\sin x(x^p + \sin x - \sin x)}{x^p(x^p + \sin x)} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)}.$$

Интеграл от первой дроби в правой части $\int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится при всех $p > 0$ и, таким образом, интегралы $\int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$ и $\int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)} dx$ сходятся (или расходятся) одновременно.

Рассмотрим второй из интегралов и оценим его подынтегральную функцию.

1) Построим оценку сверху:

$$\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)} \leq \frac{1}{x^p(x^p - 1)}.$$

Поскольку при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{1}{x^p(x^p - 1)} = O^*\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)$, то по 3-му признаку интеграл сходится при $p > 1/2$. Но тогда по теореме сравнения сходится и мажорируемый интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)} dx$, а значит, и исходный интеграл.

2) Построим теперь оценку снизу:

$$\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)} \geq \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^p(x^p + 1)} - \frac{\cos 2x}{x^p(x^p + 1)} \right).$$

Интеграл от $\frac{\cos 2x}{x^p(x^p + 1)}$ ведёт себя так же как интеграл от $\frac{\cos 2x}{x^{2p}}$, т. е. сходится (по признаку Дирихле). Однако интеграл от $\frac{1}{x^p(x^p + 1)}$ расходится при $0 < p \leq \frac{1}{2}$. Следовательно, исходный интеграл также расходится при этих p .

Ответ: интеграл сходится при $p > \frac{1}{2}$ и расходится при $0 < p \leq \frac{1}{2}$. $\square$

11.4 Признак Абеля

Пусть, по-прежнему, необходимо выяснить, сходится ли интеграл вида (1). Следующий признак является следствием признака Дирихле.

Теорема 4' (*признак Абеля, для интегралов 1-го рода*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a, +\infty)$, причём:

- 1) $f(x)$ интегрируема в $[a, +\infty)$ (хотя бы и не абсолютно);
- 2) $g(x)$ монотонна и ограничена ($\exists L = \text{const}: |g(x)| \leq L \forall x \geq a$).

Тогда интеграл (1) сходится.

Теорема 4'' (*признак Абеля, для интегралов 2-го рода*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a, b]$, причём:

- 1) $\int_a^b f(x) dx$ сходится (хотя бы и не абсолютно);
- 2) $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a, b]$.

Тогда интеграл $\int_a^b f(x)g(x) dx$ сходится.

Замечание 1. В признаке Дирихле, по сравнению с признаком Абеля, первое условие несколько ослаблено, зато второе условие заменено более сильным.

Замечание 2. Признак Абеля, как и признак Дирихле, является достаточным признаком, и поэтому вопрос о сходимости интеграла в тех случаях, когда его условия не выполняются, остаётся открытым.

Пример 169. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\sqrt{x} \cdot \ln(x^2 + 2)} dx$.

Решение. На промежутке интегрирования имеем две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. По 3-му признаку сравнения в окрестности $x = 0$ интеграл сходится. Исследуем сходимость интеграла при $x \rightarrow +\infty$. Функция $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$ интегрируема в несобственном смысле на данном промежутке (интеграл рассматривался выше), а функция $g(x) = \frac{1}{\ln(x^2 + 2)}$ монотонна и ограничена (ограниченность при $x \geq 0$ с очевидностью следует из неравенства $\left| \frac{1}{\ln(x^2 + 2)} \right| \leq \frac{1}{\ln 2}$), то по признаку Абеля интеграл сходится. Ответ: интеграл сходится. $\square$

Пример 170. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x} dx.$$

Решение. Представим интеграл в виде $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} (x^2 + 1) dx$ и воспользуемся теоремой 4'', положив $f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{x}$, $g(x) = x^2 + 1$.

1) Исследуем сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} dx$. Сделав замену $t = \frac{1}{x}$, получим $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, который сходится.

2) На полуинтервале $(0, 1]$ функция $g(x) = x^2 + 1$ ограничена ($1 < x^2 + 1 \leq 2$) и при $x \rightarrow +0$ монотонно убывает до единицы ($\lim_{x \rightarrow +0} (x^2 + 1) = 1$). Поэтому данный интеграл сходится по признаку Абеля. $\square$

11.5 Использование формулы Тейлора при исследовании сходимости интегралов

«Учителя только открывают двери, дальше вы идёте сами».

Из высказываний древних китайских мудрецов.

При оценке скорости убывания (роста) подынтегральной функции в окрест-

ности особой точки (например, для последующего применения признаков сравнения) бывает удобно воспользоваться её разложением по формуле Тейлора.

Простейший случай – замена функции в окрестности особой точки её главным членом, в том числе используя известные соотношения эквивалентности. Рассмотрим примеры на использование этого эффективного подхода.

Пример 171. Исследовать сходимость $\int_0^1 \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^p} dx$.

Решение. Единственная точка на промежутке интегрирования, которая может быть особой, – точка $x = 0$ (особенность 2-го рода). Разложим функцию, находящуюся в числителе дроби, в окрестности $x = 0$ по формуле Маклорена, и затем воспользуемся 3-м признаком сравнения (со степенью):

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^p} &= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^p} = \\ &= \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^p} = O^*\left(\frac{1}{x^{p-4}}\right). \end{aligned}$$

По признаку сравнения со степенью, интеграл сходится при $p - 4 < 1$, т. е. $p < 5$, и расходится в противном случае. $\square$

Пример 172. Исследовать сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}{x^p} dx$.

Решение. Имеем единственную особую точку $+\infty$. Так как $t = \frac{1}{x} \rightarrow +0$ при $x \rightarrow +\infty$, то для исследования интеграла на сходимость в окрестности особой точки воспользуемся стандартным разложением логарифма: $\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + o(t^n)$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ имеем

$$\frac{x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^p} = \frac{x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^p} = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

Следовательно, по 3-му признаку сравнения интеграл сходится при $p > 1$ и расходится в противном случае. $\square$

11.6 Сходимость интеграла в смысле главного значения

«Мы русские — какой восторг!»

А.В. Суворов.

Сходимость несобственного интеграла в смысле главного значения (по Коши).

1. Случай несобственных интегралов 1-го рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном сегменте $[A', A'']$, причём внутри промежутка $(-\infty, +\infty)$ нет особых точек. Как было показано выше, под интегралом $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ понимается, по определению, предел

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{A' \rightarrow -\infty \\ A'' \rightarrow +\infty}} \int_{A'}^{A''} f(x)dx$$

при независимом стремлении $A' \rightarrow -\infty$ и $A'' \rightarrow +\infty$.

Может оказаться, что в этом смысле предела нет, но существует конечный предел, отвечающий частному предположению $A'' = -A'$. Его называют *главным значением* интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (в смысле Коши) и обозначают символом¹

$$V. p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x)dx.$$

Замечание 1. Если, в частности, функция $f(x)$ *нечётная*, то её интеграл в симметричном относительно нуля сегменте $[-A, A]$ равен нулю, и поэтому

$$V. p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0,$$

хотя несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ может и вовсе не существовать (например, для функции $f(x) = x$).

Замечание 2. Если же функция $f(x)$ *чётная*, то $\int_{-A}^A f(x)dx = 2 \int_0^A f(x)dx$. Предел при $A \rightarrow +\infty$ этого интеграла существует в том и только в том случае, когда существует предел интеграла $\int_0^A f(x)dx$, т. е. существует несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$, а с ним и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Таким образом, для чётной функции главное значение интеграла существует лишь одновременно со следующим несобственным интегралом (и, естественно, равно ему):

$$V. p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Пример 173. Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx$ расходится, т. к. не существует предел $\lim_{\substack{A' \rightarrow -\infty \\ A'' \rightarrow +\infty}} \int_{A'}^{A''} x^3 dx$, но тот же интеграл в смысле главного значения $V. p. \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x^3 dx$ сходится (и равен нулю). $\square$

¹ *V.p.* — начальные буквы от слов «valeur principale», означающих по-французски «главное значение».

2. Случай несобственных интегралов 2-го рода. Пусть в конечном промежутке $[a, b]$ задана функция $f(x)$, которая имеет лишь одну особую точку c внутри промежутка и интегрируема в собственном смысле в каждой его части, не содержащей c . Несобственный интеграл 2-го рода для функции $f(x)$ в пределах от a до b определяется, как известно, равенством

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \right),$$

причём предел должен существовать при одновременном независимом стремлении положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ к нулю. В некоторых случаях, когда этот предел не существует (конечный предел), может существовать предел того же выражения, в котором $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ стремятся к нулю, оставаясь равными. Если этот предел существует и конечен, его называют (по примеру Коши) *главным значением* несобственного интеграла и обозначают символом

$$V. p. \int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right).$$

Замечание 3. Если несобственный интеграл сходится, то его значение равно главному значению этого интеграла. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Замечание 4. Если на промежутке интегрирования имеется конечное число особых точек подынтегральной функции, то промежутки интегрирования разбивают неособыми точками на части таким образом, чтобы каждая из них содержала одну особую точку. Главное значение интеграла вычисляется как сумма главных значений интегралов по каждому из полученных промежутков.

Пример 174. Сходится ли интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{\operatorname{ch} x}$? Найти его главное значение.

Решение. Покажем, что данный интеграл сходится. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{\operatorname{ch} x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{e^x + e^{-x}} = 4 \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Единственная особая точка $x = +\infty$. Обозначим $f(x) = \frac{x}{e^x + e^{-x}}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x + e^{-x}} = 0$, то по 2-му признаку сравнения из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость исходного интеграла. Тогда его значение совпадает с главным значением, которое равно нулю в силу нечётности подынтегральной функции. $\square$

Пример 175. Найти главное значение интеграла $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$.

Решение. Данный интеграл, очевидно, расходится. Найдём его главное значение:

$$V. p. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln |x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln |x| \Big|_{\varepsilon}^2 \right) = \ln 2.$$

Иначе: $V. p. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = V. p. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} + \int_1^2 \frac{dx}{x} = I_1 + I_2$, где $I_1 = 0$ (в силу нечётности функции), $I_2 = \ln 2$ (собственный интеграл). $\square$

Пример 176. Показать, что не существует $V. p. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$.

Решение. Особая точка: $x = 0$. По определению главного значения имеем

$$V. p. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{-1}^{-\varepsilon} - \frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon}^2 \right) = -\frac{3}{2} + \frac{2}{\varepsilon} = +\infty,$$

откуда следует, что $V. p. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$ не существует. $\square$

11.7 Задачи для самостоятельного решения

Используя признаки Дирихле и Абеля, исследовать сходимость интегралов:

$$\text{№482. } [8, \text{ № 2368}] \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx;$$

$$\text{№483. } \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx;$$

$$\text{№484. } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \cos \left(\frac{1}{2x^3 + 1} \right) dx;$$

$$\text{№485. } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x+1) \sqrt{x^3 + x - \frac{1}{2}}};$$

$$\text{№486. } \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \cdot \cos x}{x} dx;$$

$$\text{№487. } [8, \text{ № 2367}] \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0);$$

$$\text{№488. } \int_1^{+\infty} \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x} dx;$$

$$\text{№489. } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} \cdot \sin x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{№490. } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \operatorname{th} x dx;$$

$$\text{№491. } \int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}} dx. \quad \text{Указание: сделать подстановку } t = \frac{1}{x}.$$

$$\text{№492. } \int_2^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x+1}} dx;$$

$$\text{№493. } \int_1^{+\infty} \frac{x \sin x}{2+x^2 \ln x} dx.$$

№494. Если можно, то применить признак Дирихле к интегралу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x + 2 \sin x} dx.$$

Если признак Дирихле не применим, то исследовать сходимость данного интеграла другим способом.

Используя разложение подынтегральной функции по формуле Тейлора (в окрестности особой точки), исследовать сходимость интегралов в зависимости от значений параметра:

$$\text{№495. } \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x};$$

$$\text{№496. } \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-x^2} dx}{\sqrt{1-e^{-x}}};$$

$$\text{№497. } \int_0^1 \frac{e^x \cdot \sin x - x(1+x)}{x^p} dx;$$

$$\text{№498. } \int_0^1 \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^q} dx;$$

$$\text{№499. } \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^p} dx;$$

$$\text{№500. } \int_0^1 x^q \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) dx;$$

$$\text{№501. } \int_0^1 x^q \left(\frac{1}{x - \frac{x^3}{6}} - \frac{1}{\sin x} \right) dx;$$

$$\text{№502. } \int_0^1 \frac{(\sin \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}))^p}{x^q} dx;$$

$$\text{№503. } \int_0^1 \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^p} dx;$$

$$\text{№504. [17, с. 16]} \int_1^{+\infty} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}) dx;$$

$$\text{№505. [17, с. 17]} \int_1^{+\infty} x^p \ln \left(\cos \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

Используя разные признаки, исследовать сходимость интегралов:

$$\text{№506. [17, с. 17]} \int_e^{+\infty} \sin \left(\frac{1}{x^3} \right) \frac{1}{\ln^p x} dx;$$

$$\text{№507. } \int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sin(x\sqrt{x}) \cdot \sqrt[3]{1-x}} dx;$$

$$\text{№508. } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{\ln x}} dx;$$

Указание: сделать подстановку $t = x^2$.

$$\text{№509. } \int_0^1 \frac{|\ln x|^p}{\sqrt{x}(1-x^2)} dx;$$

$$\text{№510. } \int_0^1 \frac{\cos \sqrt{x} - e^{-x/2}}{\sqrt[3]{\ln x} \cdot x^p} dx.$$

Найти главные значения по Коши несобственных интегралов, если они существуют:

$$\text{№511. } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2};$$

$$\text{№512. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4};$$

$$\text{№513. } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x - 3)dx;$$

$$\text{№514. } [8, \text{№ 2395}] \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx;$$

$$\text{№515. а) } \int_0^2 \frac{dx}{x-1}; \quad \text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{x-1};$$

$$\text{№516. } [17, \text{с. 35}] \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3};$$

$$\text{№517. } [8, \text{№ 2393}] \int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \cdot \ln x};$$

$$\text{№518. } [8, \text{№ 2392}] \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2};$$

$$\text{№519. } [17, \text{с. 34}] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{x^2+1} dx.$$

Разные задачи:

$$\text{№520. Упростить выражение } \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

№521. Используя формулу Фруллани, вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{x} dx.$$

$$\text{№522. } ^1 \text{Исследовать на сходимость } I = \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx.$$

№523. Пусть функции f и g определены в конечном (или бесконечном) промежутке $[a, b]$ и имеют в нём (или в каждой его конечной части – если промежуток бесконечен) конечное число особых точек. Доказать, что: а) если интегрируема функция $f^2(x)$, то и сама функция $f(x)$ необходимо будет абсолютно интегрируема (про такую функцию говорят, что она «интегрируема с квадратом»); б) если обе функции интегрируемы с квадратом, то и их сумма $f(x) + g(x)$ также интегрируема с квадратом; в) при тех же предположениях и произведение $f(x)g(x)$ будет (абсолютно) интегрируемой функцией.

$$\text{№524. } [8, \text{№ 2384(а)}] \text{ Если } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится, то обязательно ли } f(x) \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow +\infty$? Рассмотреть пример интеграла Френеля $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

¹Задача предназначена для студентов, знакомых с основами теории числовых рядов.

№525. [8, № 2385] Можно ли сходящийся несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неограниченной функции $f(x)$, определённой на $[a, b]$, рассматривать как предел соответствующей интегральной суммы $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$?

№526. Привести пример функции такой, что $f(x)$ интегрируема на $[1, A]$ $\forall A > 1$, интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ расходится.

11.8 Ответы и решения

482. Разобьём интеграл на два интеграла ($A > 0$):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_0^A \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = I_1 + I_2.$$

Если доопределить в I_1 подынтегральную функцию в точке $x = 0$ её предельным значением, то получим интеграл от непрерывной функции, который сходится как собственный.

Покажем, что интеграл I_2 расходится. В самом деле,

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Первый из полученных интегралов расходится к $+\infty$, а второй сходится по признаку Дирихле (т. к. $\left| \int_A^B \cos 2x dx \right| = \left| \frac{1}{2} \sin 2x \right|_A^B \leq 1 \forall B > A$, а функция $1/x$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$). Следовательно, их разность (I_2) расходится.

Ответ: исходный интеграл расходится.

483. На промежутке интегрирования имеем две особые точки, поэтому разобьём интеграл на два интеграла и исследуем сходимость каждого:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \int_0^A \frac{\cos x}{x^p} dx + \int_A^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = I_1 + I_2.$$

1) Исследуем сходимость интеграла I_1 . При $x \rightarrow +0$ имеем $\cos x \sim 1$, поэтому для подынтегральной функции получаем $\frac{\cos x}{x^p} = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$. По 3-му признаку сравнения интеграл I_1 сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

2) Исследуем сходимость интеграла I_2 при $p < 1$. Если $p > 0$, то при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\forall B \geq A$ ограниченность интеграла

$$\left| \int_A^B \cos x dx \right| = |\sin B - \sin A| \leq 2,$$

и при этом функция $1/x^p$ монотонно стремится к 0. По признаку Дирихле заключаем, что при $0 < p < 1$ интеграл I_2 сходится.

Покажем, используя критерий Коши расходимости интеграла, что при $p \leq 0$ интеграл I_2 расходится. Требуется показать, что найдётся $\varepsilon > 0$: $\forall B \geq A$

$\exists B', B'' > B$ такие, что $\left| \int_{B'}^{B''} \frac{\cos x}{x} dx \right| > \varepsilon$. В самом деле, так как $\forall B \geq A$

$\exists n \in \mathbb{N} : -\frac{\pi}{2} + 2\pi n > B$, то возьмём в качестве B' и B'' , соответственно, числа $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Рассмотрим интеграл

$$I = \left| \int_{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}^{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} x^{-p} \cos x dx \right|.$$

Функция x^{-p} непрерывна на сегменте $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$, а функция $\cos x$ непрерывна и не меняет своего знака на этом сегменте, поэтому по 1-й теореме о среднем имеем

$$I = \xi^{-p} \left| \int_{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}^{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \cos x dx \right| = 2 \cdot \xi^{-p},$$

где $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \xi < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. При достаточно больших n имеем $\xi > 1$, а $-p \geq 0$, поэтому $\xi^{-p} > 1$ и, значит, $I > 2$. Но тогда для любого $0 < \varepsilon \leq 2$ выполнен критерий Коши расходимости интеграла. Таким образом, интеграл I_2 расходится при $p \leq 0$.

Исходный интеграл сходится, когда сходятся оба интеграла I_1 и I_2 .

Ответ: при $0 < p < 1$ интеграл сходится, в противном случае расходится.

484. Особая точка $+\infty$. Воспользуемся признаком Абеля. Во-первых, интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ сходится (интеграл Пуассона). Во-вторых, функция $\cos(\frac{1}{2x^3+1})$ монотонно возрастает и ограничена. По признаку Абеля данный интеграл сходится.

485. Воспользуемся признаком Абеля.

1) Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x - \frac{1}{2}}}$ сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$, который сходится, так как $p = 3/2 > 1$.

2) Функция $\frac{1}{\ln(x+1)}$ монотонно убывает и ограничена. Поэтому по признаку Абеля интеграл сходится.

486. 1) Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ сходится по признаку Дирихле. 2) Функция $\operatorname{arctg} x$ монотонно возрастает и ограничена ($\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$). Тогда по признаку Абеля данный интеграл сходится.

487. 1) Пусть $a \neq 0$, тогда функция $f(x) = \cos(ax)$ интегрируема в любом сегменте $[0, A]$, причём $\left| \int_0^A \cos(ax) dx \right| \leq \frac{2}{|a|}$, а функция $g(x) = \frac{1}{1+x^n}$ монотонно стремится к 0 при $x \rightarrow +\infty$ (если $n > 0$). По признаку Дирихле при $a \neq 0$ и $n > 0$ интеграл сходится.

2) При $a = 0$ имеем $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$. Поскольку при $x \rightarrow +\infty$ функция $\frac{1}{1+x^n} = O^*\left(\frac{1}{x^n}\right)$, то по 3-му признаку сравнения интеграл сходится при $n > 1$ (и расходится в противном случае).

3) При $n = 0$ имеем расходящийся интеграл при любом a .

488. Положим $f(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Поскольку при любом $A \geq 1$ $\left|\int_1^A f(x)dx\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, а $g(x) \rightarrow 0$ монотонно при $x \rightarrow +\infty$, то по признаку Дирихле данный интеграл сходится.

489. Положим $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $g(x) = e^{-x}$ и воспользуемся признаком Абеля.

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится по признаку Дирихле. На промежутке интегрирования функция $g(x)$ ограничена $0 < e^{-x} \leq e^{-1}$ и монотонна. Поэтому по признаку Абеля исследуемый интеграл сходится.

490. Положим в признаке Абеля $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \operatorname{th} x$. Интеграл от $f(x)$ сходится по признаку Дирихле, а функция $g(x)$ ограничена ($|\operatorname{th} x| < 1$) и монотонна (см. график этой функции). Поэтому интеграл сходится.

491. Сделав подстановку $t = \frac{1}{x}$, приходим к интегралу

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Полученный интеграл сходится по признаку Дирихле.

492. Так как интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}} dx$ сходится по признаку Дирихле, а функция $\operatorname{arctg} x$ монотонна и ограничена, то по признаку Абеля данный интеграл сходится.

493. Данный интеграл сходится (расходится) одновременно с интегралом $I = \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x \ln x} dx$ (т. к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, где $f(x) = \frac{x \sin x}{2 + x^2 \ln x}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x \ln x}$).

Функция $\sin x$ удовлетворяет $\forall A > 2$ условию $|\int_2^A \sin x dx| \leq 2$, а функция $\frac{1}{x \ln x} \rightarrow 0$ монотонно при $x \rightarrow +\infty$. По признаку Дирихле интеграл I , а значит и исходный интеграл, сходится. Докажем отсутствие абсолютной сходимости.

Интеграл $\int_2^{+\infty} \left| \frac{x \sin x}{2 + x^2 \ln x} \right| dx$ сходится (расходится) одновременно с интегралом $\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x \ln x} dx$. Справедлива оценка

$$\frac{|\sin x|}{x \ln x} \geq \frac{\sin^2 x}{x \ln x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x \ln x} - \frac{\cos 2x}{x \ln x} \right).$$

Проинтегрировав это неравенство в пределах от 2 до $+\infty$, получим

$$\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x \ln x} dx \geq \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} - \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x \ln x} dx = I_1 - I_2,$$

где интеграл I_1 расходится, а интеграл I_2 сходится (по признаку Дирихле), поэтому их разность расходится, а значит расходится и мажорирующий её интеграл от модуля функции. Ответ: интеграл сходится условно.

494. Обозначим $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x + 2 \sin x}$. Функция $f(x)$ на полу-прямой $[1, +\infty)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную, а функция $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Однако $g(x)$ не является монотонной, т. к. её производная $g'(x) = -\frac{1 + 2 \cos x}{(x + 2 \sin x)^2}$ не сохраняет знака. Поэтому признак Дирихле к данному интегралу при таком выборе функций применить нельзя.

Поступим иначе. Используя разложение по Маклорену $(1+t)^{-1} = 1 - t + o(t)$ при $t \rightarrow 0$ применительно к функции $(1 + \frac{2 \sin x}{x})^{-1}$, получаем при $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{\sin x}{x + 2 \sin x} = \frac{\sin x}{x} \left(1 + \frac{2 \sin x}{x}\right)^{-1} = \frac{\sin x}{x} \left(1 - \frac{2 \sin x}{x} + o\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right).$$

Таким образом, при $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{\sin x}{x + 2 \sin x} = \frac{\sin x}{x} + \varphi(x), \quad \text{где } \varphi(x) = -\frac{2 \sin^2 x}{x^2} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right).$$

Отсюда, очевидно, следует, что $|\varphi(x)| \leq \frac{C}{x^2}$ при $x \geq x_0$, где C и x_0 – некоторые положительные числа. Поэтому интеграл $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится. Интеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ также сходится. Следовательно, исходный интеграл тоже сходится

как сумма сходящихся интегралов от функций $\frac{\sin x}{x}$ и $\varphi(x)$. Отметим, что в данном примере отсутствие монотонности функции $g(x)$ не помешало сходимости интеграла.

495. Подынтегральная функция $f(x)$ имеет единственную особую точку на промежутке интегрирования – $x = 0$. Для выяснения, сходится ли интеграл в окрестности этой особой точки, выполним разложение подынтегральной функции по формуле Маклорена:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - \cos x} = \frac{1}{(1 + x + o(x)) - (1 + o(x))} = \frac{1}{x + o(x)} = \frac{1}{x(1 + \frac{o(x)}{x})} \sim \frac{1}{x}.$$

Таким образом, исследуемый интеграл сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, который расходится.

496. Подынтегральная функция $f(x)$ имеет единственную особую точку на промежутке интегрирования — $x = 0$. Заметим, что при $x \rightarrow +0$ имеем $\sqrt{1 - e^{-x}} = \sqrt{1 - (1 - x + o(x))} = \sqrt{x + o(x)} \sim \sqrt{x}$, а $e^{-x^2} \sim 1$, то $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Так как $p = \frac{1}{2} < 1$, то по 3-му признаку сравнения интеграл сходится.

497. Единственная точка на промежутке интегрирования, которая может быть особой, — это точка $x = 0$. Это несобственный интеграл 2-го рода. Разложим функцию, находящуюся в числителе дроби, в окрестности точки $x = 0$ по формуле Маклорена, и затем воспользуемся 3-м признаком сравнения (со степенью):

$$\begin{aligned} & \frac{e^x \cdot \sin x - x(1+x)}{x^p} = \\ &= \frac{(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2))(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)) - x - x^2}{x^p} = \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^p} = O^*\left(\frac{1}{x^{p-3}}\right). \end{aligned}$$

По признаку сравнения со степенью, интеграл сходится при $p - 3 < 1$, т. е. $p < 4$, и расходится в противном случае.

498. Единственная точка на промежутке интегрирования, которая может быть особой, — это точка $x = 0$ (особенность 2-го рода). Разложим в окрестности особой точки функцию, находящуюся в числителе дроби, по формуле Маклорена. Для этого нам понадобятся два стандартных разложения, справедливые при $t \rightarrow 0$: $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$, $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$. Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^q} = \\ &= \frac{(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)) - (1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4))}{x^q} = \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x^q} = O^*\left(\frac{1}{x^{q-4}}\right). \end{aligned}$$

По признаку сравнения со степенью, интеграл сходится при $q - 4 < 1$, т. е. $q < 5$, и расходится в противном случае.

499. На промежутке интегрирования имеется одна особая точка: $x = 0$. При $x \rightarrow 0$ имеем $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^p} &= \frac{(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) + (1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) - 2}{x^p} = \\ &= \frac{x^2 + o(x^2)}{x^p} = \frac{1 + o(1)}{x^{p-2}}. \end{aligned}$$

Поэтому по признаку сравнения со степенью интеграл сходится при $p - 2 < 1$, т. е. $p < 3$, и расходится в противном случае.

500. Приведём выражение в скобках к общему знаменателю:

$$\int_0^1 x^q \cdot \frac{\sin x - x}{x \sin x} dx.$$

Единственная точка на промежутке интегрирования, которая может быть особой, – это точка $x = 0$ (особенность 2-го рода). Разложим в окрестности особой точки числитель и знаменатель дроби по формуле Маклорена:

$$x^q \cdot \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x}{x(x + o(x))} = x^q \cdot \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)}.$$

При $x \rightarrow 0$ подынтегральная функция есть $O^*\left(\frac{1}{x^{-1-q}}\right)$. Согласно признаку сравнения со степенью, интеграл сходится в окрестности нуля тогда и только тогда, когда $-1 - q < 1$, т. е. $q > -2$ (при $q \leq -2$ интеграл расходится).

501. Приведём выражение в скобках к общему знаменателю:

$$\int_0^1 x^q \cdot \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \sin x} dx.$$

Единственная точка на промежутке интегрирования, которая может быть особой, – точка $x = 0$. Это несобственный интеграл 2-го рода. Разложим в окрестности особой точки числитель и знаменатель дроби по формуле Маклорена:

$$x^q \cdot \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) - x + \frac{x^3}{6}}{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)(x + o(x))} = x^q \cdot \frac{\frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x^2 + o(x^2)}.$$

При $x \rightarrow 0$ подынтегральная функция есть $O^*\left(\frac{1}{x^{-3-q}}\right)$. Согласно признаку сравнения со степенью, интеграл сходится в окрестности нуля тогда и только тогда, когда $-3 - q < 1$, т. е. $q > -4$ (при $q \leq -4$ интеграл расходится).

502. Единственная точка на границе промежутка интегрирования, которая может быть особой, – точка $x = 0$. Таким образом, это несобственный интеграл 2-го рода. Разложим в окрестности особой точки числитель дроби по формуле Маклорена. Имеем при $x \rightarrow 0$: $\sin \sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3!} + o(x\sqrt{x})$, $\ln(1 + \sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x})^2}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{3} + o(x\sqrt{x})$. Тогда для подынтегральной функции имеем при $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{(\sin \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}))^p}{x^q} = \\ & = \frac{\left(\left(\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3!} + o(x\sqrt{x})\right) - \left(\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x})^2}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{3} + o(x\sqrt{x})\right)\right)^p}{x^q} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^p}{x^q} = O^*\left(\frac{1}{x^{q-p}}\right).$$

Согласно признаку сравнения со степенью, интеграл сходится в окрестности нуля тогда и только тогда, когда $q - p < 1$ (в противном случае интеграл расходится).

503. При $x \rightarrow +0$ имеем

$$\frac{1 - e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)}}{x^p} = \frac{1 - (1 + \sin x \cdot \ln(\cos x) + o(x^3))}{x^p} =$$

$$(\text{т. к. } \ln(\cos x) = \frac{1}{2} \ln(\cos^2 x) = \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x) \sim -\frac{1}{2} \sin^2 x \sim -\frac{1}{2} x^2)$$

$$= \frac{(-x + o(x))(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) + o(x^3)}{x^p} = \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^p} = O^*\left(\frac{1}{x^{p-3}}\right).$$

По 3-му признаку сравнения интеграл сходится при $p - 3 < 1$, т. е. при $p < 4$.

504. Раскладывая по формуле Тейлора подынтегральную функцию при $x \rightarrow +\infty$, находим

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1} = x^{3/2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} - x^{3/2} \sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} = \\ &= x^{3/2} \left(1 + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x^{3/2} \left(1 - \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{3}{2} > 1$, то интеграл сходится.

505. Разложим по Тейлору подынтегральную функцию при $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = x^p \ln\left(\cos \frac{1}{x^2}\right) = x^p \ln\left(1 - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = x^p \left(-\frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right).$$

Поэтому данный интеграл сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{4-p}}$, т. е. при $4 - p > 1$. Ответ: интеграл сходится при $p < 3$ и расходится в противном случае.

506. Подынтегральная функция $f(x)$ строго положительна, применим 2-й признак сравнения. Введём функцию $g(x) = 1/x^2$. Поскольку при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\sin \frac{1}{x^3} \sim \frac{1}{x^3}$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^2}{\ln^p x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^2}{\ln^p x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln^p x} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то при всех p сходится и исходный интеграл.

507. На концах промежутка интегрирования имеем 2 особые точки: 0 и 1. Разобьём интеграл, согласно свойству аддитивности, на два интеграла:

$$\int_0^{1/2} \frac{e^x - 1}{\sin(x\sqrt{x}) \cdot \sqrt[3]{1-x}} dx + \int_{1/2}^1 \frac{e^x - 1}{\sin(x\sqrt{x}) \cdot \sqrt[3]{1-x}} dx = I_1 + I_2.$$

1) I_1 : при $x \rightarrow 0$ имеем $e^x - 1 \sim x$, $\sin(x\sqrt{x}) \sim x\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{1-x} \sim 1$, поэтому $\frac{e^x - 1}{\sin(x\sqrt{x}) \cdot \sqrt[3]{1-x}} = O^*\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Согласно признаку сравнения со степенью, так как $\frac{1}{2} < 1$, то интеграл I_1 сходится.

2) I_2 : при $x \rightarrow 1$ имеем $\frac{e^x - 1}{\sin(x\sqrt{x}) \cdot \sqrt[3]{1-x}} = O^*\left(\frac{1}{(1-x)^{1/3}}\right)$. Согласно тому же признаку сравнения со степенью, так как $\frac{1}{3} < 1$, то интеграл I_2 сходится. Поскольку сходятся оба интеграла, то исходный интеграл также сходится.

508. Замена $t = x^2$, $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ приводит к интегралу

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t \ln t}} dt.$$

На промежутке интегрирования имеем 2 особые точки: 1 и $+\infty$. Разобьём интеграл, согласно свойству аддитивности, на два интеграла:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_1^2 \frac{\cos t}{\sqrt{t \ln t}} dt + \int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t \ln t}} dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (I_1 + I_2).$$

Интеграл I сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба интеграла I_1 и I_2 .

1) Исследуем сходимость интеграла I_1 . При $t \rightarrow 1$ имеем: $\cos t \sim \cos 1$, $\sqrt{t} \sim 1$, $\sqrt{\ln t} = \sqrt{\ln(1 + (t-1))} \sim (t-1)^{\frac{1}{2}}$, поэтому подынтегральная функция есть $O^*\left(\frac{1}{(t-1)^{1/2}}\right)$. Согласно признаку сравнения со степенью, так как $\frac{1}{2} < 1$, то интеграл сходится.

2) Исследуем сходимость интеграла I_2 . При $t \rightarrow +\infty$ имеем: $\frac{1}{\sqrt{t \ln t}} \rightarrow 0$ монотонно (производная отрицательна), а первообразная от функции $\cos t$ ограничена ($\left| \int_2^A \cos t dt \right| \leq 2 \forall A \geq 2$). Следовательно, по признаку Дирихле интеграл I_2 сходится. Ответ: интеграл сходится.

509. На промежутке интегрирования имеем 2 особые точки: 0 и 1. Разобьём интеграл, согласно свойству аддитивности, на два интеграла:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln x|^p}{\sqrt{x}(1-x^2)} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{|\ln x|^p}{\sqrt{x}(1-x^2)} dx = I_1 + I_2.$$

Интеграл I сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба интеграла I_1 и I_2 .

1) Исследуем сходимость интеграла I_1 . При $x \rightarrow 0$ сравним подынтегральную функцию $f(x) = \frac{|\ln x|^p}{\sqrt{x}(1-x^2)}$ с функцией $g(x) = 1/x^{\frac{2}{3}}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{2}{3}} |\ln x|^p}{\sqrt{x}(1-x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{6}} |\ln x|^p = 0$$

при любых $p \in \mathbb{R}$ (степенная функция стремится к нулю быстрее, чем растёт логарифмическая функция). Так как интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$ сходится, то по 2-му признаку сравнения интеграл I_1 также сходится при любом p .

2) Исследуем сходимость интеграла I_2 . При $x \rightarrow 1$ имеем $\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim x-1$, поэтому $f(x) = O^*\left(\frac{1}{(x-1)^{1-p}}\right)$ и по признаку сравнения со степенью данный интеграл сходится при $1-p < 1$, т. е. $p > 0$, и расходится в противном случае.

Ответ: интеграл сходится при $p > 0$.

510. На промежутке интегрирования имеем 2 особые точки: 0 и 1. Разобьём интеграл, согласно свойству аддитивности, на два интеграла:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \sqrt{x} - e^{-x/2}}{\sqrt[3]{\ln x} \cdot x^p} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\cos \sqrt{x} - e^{-x/2}}{\sqrt[3]{\ln x} \cdot x^p} dx = I_1 + I_2.$$

Интеграл I сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба интеграла I_1 и I_2 .

1) Исследуем сходимость интеграла I_1 . При $x \rightarrow 0$

$$\cos \sqrt{x} - e^{-x/2} = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

Воспользуемся 2-м признаком сравнения и сравним подынтегральную функцию $f(x) = \frac{-\frac{x^2}{12} + o(x^2)}{\sqrt[3]{\ln x} \cdot x^p}$ с функцией $g(x) = \frac{1}{x^k}$, где $k < 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{12} + o(x^2)}{\sqrt[3]{\ln x} \cdot x^{p-k}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12} + o(1)}{\sqrt[3]{\ln x} \cdot x^{p-k-2}} = 0$$

при $p-k-2 < 0$, т. е. $p < k+2 < 3$. Итак, интеграл I_1 сходится при $p < 3$.

2) Исследуем сходимость интеграла I_2 . При $x \rightarrow 1$ имеем $\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim x-1$, поэтому $f(x) = O^*\left(\frac{1}{(x-1)^{1/3}}\right)$ и так как $\frac{1}{3} < 1$, то по признаку сравнения со степенью данный интеграл сходится при любом p .

Ответ: интеграл сходится при $p < 3$.

511. Покажем, что интеграл в смысле главного значения (по Коши) не существует (расходится). В самом деле,

$$\begin{aligned} V. p. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{-1}^{-\varepsilon} - \frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 - 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{2}{\varepsilon} - 2 \right) = +\infty. \end{aligned}$$

512. Имеем

$$V. p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} = \lim_{A \rightarrow +\infty} 2 \int_0^A \frac{dx}{x^2 + 4} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^A = \frac{\pi}{2}.$$

513. Данный интеграл как несобственный расходится, однако у него существует (конечное) главное значение. В самом деле, положим $t = x - 3$:

$$\begin{aligned} V. p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x-3)dx &= V. p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^{+A} \sin t dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-\cos t) \Big|_{-A}^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (-\cos A + \cos(-A)) = 0. \end{aligned}$$

514. Имеем

$$\begin{aligned} V. p. \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg} x dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \operatorname{arctg} x dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{-A}^A - \int_{-A}^A \frac{x dx}{1+x^2} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(x^2+1) \Big|_{-A}^A = 0. \end{aligned}$$

515. а) Интеграл как несобственный не существует, но попробуем найти его главное значение (по Коши):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln|x-1| \Big|_0^{1-\varepsilon} + \ln|x-1| \Big|_{1+\varepsilon}^2 \right) = \ln 1 = 0.$$

Иначе: сделав симметризирующую подстановку $t = x - 1$, получим интеграл

$$V. p. \int_0^2 \frac{dx}{x-1} = V. p. \int_{-1}^1 \frac{dt}{t} = 0.$$

б) Данный интеграл как несобственный не существует. Найдём его главное значение:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x-1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln|x-1| \Big|_0^{1-\varepsilon} + \ln|x-1| \Big|_{1+\varepsilon}^3 \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} ((\ln \varepsilon - \ln 1) + (\ln 2 - \ln \varepsilon)) = \ln 2.$$

Иначе: сделаем симметризирующую подстановку $t = x - 1$ и разобьём интеграл на два:

$$V. p. \int_0^3 \frac{dx}{x-1} = V. p. \int_{-1}^2 \frac{dt}{t} = V. p. \int_{-1}^1 \frac{dt}{t} + \int_1^2 \frac{dt}{t} = 0 + \ln 2 = \ln 2.$$

516. Особая точка подынтегральной функции: $x = 0$. По определению,

$$V. p. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x^3} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{2x^2} \Big|_{-1}^{-\varepsilon} - \frac{1}{2x^2} \Big|_{\varepsilon}^2 \right) = \frac{3}{8}.$$

517. По определению главного значения имеем

$$\begin{aligned} V. p. \int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x \ln x} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{d(\ln x)}{\ln x} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln |\ln x| \Big|_{1/2}^{1-\varepsilon} + \ln |\ln x| \Big|_{1+\varepsilon}^2 \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} \right|. \end{aligned}$$

Так как при $\varepsilon \rightarrow +0$ имеем $\ln(1-\varepsilon) \sim -\varepsilon$, $\ln(1+\varepsilon) \sim +\varepsilon$, то данный предел равен $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{-\varepsilon}{\varepsilon} \right| = \ln 1 = 0$.

518. Поскольку $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$, то на промежутке интегрирования имеем три особые точки: $x = 1$, $x = 2$, $x = +\infty$. Этот интеграл, очевидно, расходится. Вычислим, однако, его главное значение:

$$\begin{aligned} &V. p. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left(\int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int_{1+\varepsilon_1}^{2-\varepsilon_2} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int_{2+\varepsilon_2}^A \frac{dx}{(x-1)(x-2)} \right) = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|_0^{1-\varepsilon_1} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|_{1+\varepsilon_1}^{2-\varepsilon_2} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|_{2+\varepsilon_2}^A \right) = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left(\ln \left| \frac{1+\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right| - \ln 2 + \ln \left| \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} \right| - \ln \left| \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right| + \ln \left| \frac{A-2}{A-1} \right| - \ln \left| \frac{\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2} \right| \right) = \end{aligned}$$

$$= \dots = -\ln 2.$$

519. Заметим, что несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{x^2+1} dx$ расходится, т. к. не существует предел

$$\lim_{\substack{A'' \rightarrow +\infty \\ A' \rightarrow -\infty}} \int_{A'}^{A''} \frac{1+x}{x^2+1} dx = \lim_{\substack{A'' \rightarrow +\infty \\ A' \rightarrow -\infty}} \left(\operatorname{arctg} A'' - \operatorname{arctg} A' + \frac{1}{2} \ln \frac{(A'')^2+1}{(A')^2+1} \right).$$

Найдём теперь главное значение данного интеграла:

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{1+x}{x^2+1} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \Big|_{-A}^{+A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} 2 \operatorname{arctg} A = \pi.$$

520. Так как данный интеграл – это гамма-функция, то, используя формулу $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$, получаем ответ: $n+1$.

521. Заметим, что функция $\frac{1}{x}$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, а функция $\cos x$ имеет ограниченную первообразную. Таким образом, по признаку Дирихле интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ сходится при любом положительном a . Далее, функция $f(x) = \cos x$ непрерывна на всей числовой прямой. Применяя вторую из формул Фруллани, имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \cdot \ln \frac{b}{a},$$

т. е., полагая $a = 2$, $b = 1$, получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{x} dx = \cos 0 \cdot \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{1}{2}.$$

522. Если $\sqrt{k} \leq x < \sqrt{k+1}$, то $k \leq x^2 < k+1$ и исходный интеграл представляется числовым рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^{[x^2]} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}},$$

причём интеграл и числовой ряд сходятся и расходятся одновременно. Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, поэтому сходится и несобственный интеграл, хотя подынтегральная функция не стремится к 0 при $x \rightarrow \infty$.

523. По теореме сравнения справедливость этих утверждений вытекает из оценок:

$$|f| \leq \frac{1+f^2}{2}, \quad (f+g)^2 \leq 2(f^2+g^2), \quad |f \cdot g| \leq \frac{f^2+g^2}{2}.$$

524. Не обязательно. Покажем, что интеграл Френеля сходится. В самом деле, сделаем замену $t = x^2$, тогда $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ и приходим к интегралу $\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, который сходится по признаку Дирихле. В то же время функция $y = \sin(x^2)$ не имеет предела при $x \rightarrow +\infty$.

525. Нельзя. Конечного предела интегральные суммы иметь не будут (результат будет зависеть от выбора промежуточных точек ξ_i).

526. Например, $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. В самом деле, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится по признаку Дирихле, а второй из интегралов расходится, поскольку

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx = I_1 - I_2,$$

где I_1 расходится, а I_2 сходится (по Дирихле).

12 СЕМИНАР: Абсолютная (условная) сходимость несобственного интеграла

Верно ли, что число, записанное в десятичной системе счисления единицей со 100 нулями, называется «ГУГОЛ»?

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

При исследовании сходимости несобственных интегралов от *знакопеременных функций* возникают более тонкие вопросы: если интеграл сходится, то как – абсолютно или условно? Эти понятия различаются для знакопеременных функций, а для знакопостоянных функций просто совпадают (сходящиеся интегралы от неотрицательных функций сходятся абсолютно).

12.1 Понятие абсолютной (условной) сходимости интеграла. Некоторые теоремы

Напомним определения абсолютной и условной сходимостей на примере несобственных интегралов 1-го рода.

Опр. 1 (*абсолютной сходимости*). Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$. Если наряду с интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называют *абсолютно сходящимся*, а функцию $f(x)$ – *абсолютно интегрируемой* в промежутке $[a, +\infty)$.

Опр. 2 (*условной сходимости*). Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но не абсолютно (интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится), то в этом случае принято считать, что он сходится *условно*.

Аналогичные определения вводятся для интегралов 2-го рода.

Геометрический смысл несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от неотрицательной функции $f(x)$ состоит в том, что интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции, а снизу – полупрямой $[a, +\infty)$. Несмотря на то, что данная криволинейная трапеция не относится к фигурам, ограниченным на плоскости (её нельзя поместить целиком в круг фиксированного радиуса), её площадь может быть конечным числом для сходящихся интегралов. Если подынтегральная функция является знакопеременной, то абсолютная сходимость достигается за счёт скорости убывания функции, а условная – за счёт взаимной компенсации площадей тех

участков, где функция неотрицательна, и тех участков, где она принимает отрицательные значения (так как в последнем случае площадь берётся со знаком минус).

Как исследовать интеграл на абсолютную (условную) сходимость. При исследовании интеграла от знакопеременной функции на абсолютную (условную) сходимость необходимо исследовать сходимость интегралов $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b |f(x)|dx$, и после этого сделать соответствующий вывод.

Какие теоремы можно дополнительно использовать наряду с признаками сходимости, критерием Коши и формулой Тейлора.

Теорема 1' (*о связи между обычной и абсолютной сходимостями, для интегралов 1-го рода*). Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (т. е. из абсолютной сходимости несобственного интеграла следует обычная сходимость). При этом справедливо неравенство

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

По этой причине для абсолютно сходящихся интегралов (если бы знать об этом заранее!) удобно начать исследование на абсолютную (условную) сходимость именно с исследования сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Приведём полностью аналогичное утверждение для несобственных интегралов 2-го рода (с особой точкой b).

Теорема 1'' (*о связи между обычной и абсолютной сходимостями, для интегралов 2-го рода*). Если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$. При этом справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Приведём ещё один признак абсолютной сходимости, который может оказаться полезным на практике.

Теорема 2 (*достаточное условие абсолютной сходимости*). Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[a, +\infty)$. Если функция $g(x)$ ограничена на этом промежутке, то и произведение $f(x)g(x)$ является абсолютно интегрируемой функцией на промежутке $[a, +\infty)$.

Пример 177. Исследовать на абсолютную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} (x-3)e^{-2x^2} dx.$$

Решение. Исследуем сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} |x-3|e^{-2x^2} dx$. Представим подынтегральную функцию в виде $\frac{|x-3|}{e^{x^2}} \cdot e^{-x^2}$. Функция $g(x) = \frac{|x-3|}{e^{x^2}}$ непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-3|}{e^{x^2}} = 0$, следовательно, она ограничена на нём. При этом интеграл Эйлера–Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ абсолютно сходится. Поэтому исходный интеграл также сходится абсолютно. $\square$

Исследуем на абсолютную сходимость важный класс интегралов.

Пример 178. Исследовать на абсолютную (условную) сходимость в зависимости от параметра p интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx.$$

Решение. На предыдущем семинаре мы уже исследовали этот интеграл на сходимость и выяснили, что он сходится при $0 < p < 2$ и расходится в противном случае. Исследуем его теперь (при указанных значениях p) на абсолютную сходимость.

Для этого рассмотрим интеграл $\bar{I} = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ от модуля функции (так как знаменатель положителен на промежутке интегрирования, то модуль можно оставить только в числителе дроби) и выясним, когда он сходится.

Поскольку на промежутке интегрирования имеются две особые точки, то разобьём интеграл на два интеграла:

$$\bar{I} = \int_0^A \frac{|\sin x|}{x^p} dx + \int_A^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

и исследуем сходимость каждого из них.

1) Интеграл $\bar{I}_1$. Когда мы исследовали сходимость интеграла $I_1 = \int_0^A \frac{\sin x}{x^p} dx$ с помощью 3-го признака сравнения, то поскольку этот признак даёт абсолютную сходимость, то интеграл $\bar{I}_1$ сходится при $0 < p < 2$.

2) Интеграл $\bar{I}_2$. Имеем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2 &= \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^p} = \int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx \leq \\ &\leq \int_A^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx \leq \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = J_1. \end{aligned}$$

Из правого неравенства следует, что так как интеграл J_1 сходится при $p > 1$, то по теореме сравнения мажорируемый им интеграл $\bar{I}_2$ также сходится, а это означает, что при $p > 1$ интеграл $I_2 = \int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится абсолютно.

Из левого неравенства следует, что так как при $0 < p \leq 1$ интеграл J_1 расходится, а интеграл J_2 сходится (по признаку Дирихле), то их разность $J_1 - J_2$ расходится,

а значит, интеграл $\bar{I}_2$ расходится. Это, в свою очередь, означает, что интеграл I_2 абсолютно расходится (т. е. сходимость будет лишь условная).

Ответ: интеграл сходится абсолютно при $1 < p < 2$,

интеграл сходится условно при $0 < p \leq 1$,

интеграл расходится в остальных случаях. $\square$

12.2 Задачи для самостоятельного решения

Ответ на вопрос в начале семинара: да.

Исследовать на абсолютную (условную) сходимость интегралы:

$$\text{№527. } \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx;$$

$$\text{№528. } \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 2x + 3} dx;$$

$$\text{№529. } \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{№530. } \int_1^2 \frac{\cos \frac{1}{2-x}}{(2-x)^2} dx;$$

$$\text{№531. } \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}{e^{\sin x} - 1} dx;$$

$$\text{№532. } \int_1^{+\infty} \frac{\arcsin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x-1}} dx;$$

$$\text{№533. } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}};$$

$$\text{№534. } [8, \text{№ 2379}] \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \cos x}{x + 100} dx;$$

$$\text{№535. } \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot \sin(e^x) dx;$$

Указание: положить $t = e^x$.

$$\text{№536. } \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x} dx;$$

$$\text{№537. } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\frac{x}{5} + \frac{1}{2})}{2 \ln x + 1} dx;$$

$$\text{№538. } \int_0^{+\infty} \cos x \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx;$$

$$\text{№539. } \int_1^{+\infty} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\ln(1+x)} \cdot \operatorname{arctg} x dx;$$

$$\text{№540. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x + 2) \cdot \sin(\operatorname{tg} x) dx;$$

$$\text{№541. } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x+2)}{\ln^2(x+1)} \cdot \sin \frac{1}{x} dx;$$

$$\text{№542. } [8, \text{№ 2380(a)}] \int_0^{+\infty} x^p \cdot \sin(x^q) dx \quad (q \neq 0);$$

Указание: положить $t = x^q$.

$$\text{№543. } [8, \text{ № 2380(б) }] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x) dx;$$

Указание: положить $t = \sec x$.

$$\text{№544. } [8, \text{ № 2380(в) }] \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \cos(e^x) dx;$$

Указание: положить $t = e^x$.

$$\text{№545. } \int_0^{+\infty} \frac{\cos(e^x)}{\sqrt{\ln(x+1)}} dx;$$

$$\text{№546. } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \operatorname{th} x dx;$$

$$\text{№547. } \int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{x^3})}{x^p} dx;$$

$$\text{№548. } \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) x^q dx;$$

$$\text{№549. } \int_1^{+\infty} \ln^p x \cdot \cos x dx;$$

$$\text{№550. } [8, \text{ № 2381 }] \int_0^{+\infty} \frac{x^p \cdot \sin x}{1+x^q} dx \quad (q \geq 0);$$

$$\text{№551. } \int_1^{+\infty} \frac{x^p \cdot \sin(x^2)}{1+x^q} dx.$$

Указание: рассмотреть случаи $q \geq 0$ и $q < 0$.

$$\text{№552. } \int_2^{+\infty} \frac{x^p \cdot \sin x}{\ln x} dx;$$

$$\text{№553. } [8, \text{ № 2383 }] \int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \cdot \sin x dx, \text{ где } P_m(x), P_n(x) - \text{целые алгебраические многочлены и } P_n(x) > 0 \text{ при } x \geq a \geq 0.$$

12.3 Ответы и решения

527. Сделав замену переменной $t = x^2$, откуда $x = \sqrt{t}$, приходим к интегралу $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, который сходится по признаку Дирихле. Докажем теперь, что интеграл сходится условно. Для этого покажем, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} dt$ расходится. В самом деле, проинтегрировав неравенство $\frac{1}{2}(1 - \cos 2t) = \sin^2 t \leq |\sin t|$, получим оценку снизу для интеграла:

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{\sqrt{t}} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt,$$

где интеграл $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ расходится, а интеграл $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{\sqrt{t}} dt$ сходится по признаку Дирихле, но тогда их разность расходится. По теореме сравнения из этого следует, что интеграл абсолютно не сходится, т. е. сходимости условная.

528. В силу оценки

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin 3x}{x^2 + 2x + 3} \right| dx &= \int_0^{+\infty} \frac{|\sin 3x| dx}{(x+1)^2 + 2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \end{aligned}$$

и признака абсолютной сходимости, исследуемый интеграл сходится абсолютно.

529. Исследуем сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{|\cos \frac{1}{x}|}{\sqrt{x}} dx$. Поскольку $0 \leq |\cos \frac{1}{x}| \leq 1$, то для всех значений $0 < x < 1$ промежутка интегрирования справедливо неравенство: $\frac{|\cos \frac{1}{x}|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Так как несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, то и интеграл $\int_0^1 \frac{|\cos \frac{1}{x}|}{\sqrt{x}} dx$ также сходится. По признаку сравнения (абсолютной сходимости) это означает абсолютную сходимость исходного интеграла.

530. Этот интеграл легко вычисляется. Для этого преобразуем его и затем сделаем подстановку $t = \frac{1}{2-x}$:

$$\int_1^2 \frac{\cos \frac{1}{2-x}}{(2-x)^2} dx = \int_1^2 \cos \frac{1}{2-x} d\left(\frac{1}{2-x}\right) = \int_1^{+\infty} \cos t dt.$$

Очевидно, данный интеграл расходится.

531. Обозначим $f(x)$ – подынтегральная функция. Особая точка: $x = 0$. При $x \rightarrow 0$ имеем:

$$\ln(1 + \sqrt[3]{x}) \sim x^{\frac{1}{3}}, \quad e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x.$$

Тогда $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^{2/3}}\right)$. Так как $\frac{2}{3} < 1$, то по признаку сравнения со степенью получаем, что интеграл сходится. Так как при $x \in (0, 1]$ подынтегральная функция положительна, то интеграл сходится абсолютно.

532. Имеем на промежутке интегрирования две особые точки: 1 и $+\infty$. Обозначим подынтегральную функцию $f(x)$.

При $x \rightarrow 1$ имеем: $f(x) = O^*\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$, и так как $p = \frac{1}{2} < 1$, то интеграл сходится. При $x \rightarrow +\infty$ $\arcsin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, $\sqrt{x-1} \sim \sqrt{x}$, поэтому $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$, $p = \frac{3}{2} > 1$ и, следовательно, интеграл также сходится. Поскольку подынтегральная функция положительна, то сходимость интеграла абсолютная.

533. Единственная особая точка $x = 0$. Вычислим, применяя правило Лопиталя, предел

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2.$$

Поэтому при $x \rightarrow +0$ имеем $\frac{1}{\sqrt[3]{x}(e^x - e^{-x})} = O^*\left(\frac{1}{x^{2/3}}\right)$ и поскольку $\frac{2}{3} < 1$, то по 3-му признаку сравнения интеграл сходится абсолютно.

534. Единственная особая точка $x = +\infty$.

1) *Сходимость.* При $x \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{\sqrt{x}}{x+100} \rightarrow +0$ монотонно, а первообразная от функции $\cos x$ ограничена ($|\int_0^A \cos x dx| \leq 2 \forall A \geq 0$). Следовательно, по признаку Дирихле интеграл сходится.

2) *Абсолютная сходимость.* Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot |\cos x|}{x+100} dx$. Из оценок

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \cos 2x}{x+100} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \cos^2 x}{x+100} dx \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot |\cos x|}{x+100} dx \end{aligned}$$

следует, что так как интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx$ расходится, а интеграл

$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \cos 2x}{x+100} dx$ сходится (по признаку Дирихле), то их сумма расходится. Поэтому интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot |\cos x|}{x+100} dx$, мажорирующий расходящийся, также расходится, т. е. исходный интеграл не сходится абсолютно. Ответ: интеграл сходится условно.

535. Замена $t = e^x$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$ приводит к интегралу:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t} \cdot \sin t}{t} dt.$$

Единственная особая точка: $+\infty$. Имеем при $t \rightarrow +\infty$ $\frac{\sqrt{\ln t}}{t} \rightarrow 0$ монотонно (производная отрицательна), а первообразная от функции $\sin t$ ограничена ($|\int_1^A \sin t dt| \leq 2 \forall A \geq 1$). Следовательно, по признаку Дирихле интеграл сходится.

Исследуем теперь интеграл на абсолютную сходимость. Поскольку

$$\frac{\sqrt{\ln t} \cdot |\sin t|}{t} \geq \frac{\sqrt{\ln t} \cdot \sin^2 t}{t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\ln t} \cdot (1 - \cos 2t)}{t},$$

то

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t} \cdot |\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t}}{t} dt - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t} \cos 2t}{t} dt.$$

При этом $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t}}{t} dt > \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$, т. е. расходится, а второй интеграл сходится по признаку Дирихле. Их разность является расходящимся интегралом, что означает, что исходный интеграл абсолютно расходится. Ответ: сходится условно.

536. На предыдущем семинаре мы уже показали, применив признак Абеля, что данный интеграл сходится. Теперь выясним, какова эта сходимость: абсолютная или условная? Для этого рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x} \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx$.

Сделаем замену $t = \frac{1}{x}$ и получим

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} + 1 \right) \frac{|\sin t| dt}{t} = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t| dt}{t^3} + \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t| dt}{t}.$$

Первый из интегралов сходится по признаку сравнения ($\frac{|\sin t|}{t^3} \leq \frac{1}{t^3}$), а второй – расходится ($\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1 - \cos 2t}{t}$), поэтому их сумма расходится. А это значит, что исследуемый интеграл сходится лишь условно.

537. $+\infty$ есть единственная особая точка на промежутке интегрирования.

1) Исследуем интеграл на абсолютную (условную) сходимость, т. е. выясним сходимость интеграла $\int_2^{+\infty} |f(x)| dx$ (данный интеграл сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$). Имеем при $x \rightarrow +\infty$

$$|f(x)| = \frac{|\cos(\frac{x}{5} + \frac{1}{2})|}{2 \ln x + 1} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{|\cos(\frac{x}{5} + \frac{1}{2})|}{\ln x} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2(\frac{x}{5} + \frac{1}{2})}{\ln x} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{\cos(\frac{2x}{5} + 1)}{\ln x} \right)$$

Так как $\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$, а интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится, то и интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$ также расходится. В то же время $\int_2^{+\infty} \frac{\cos(\frac{2x}{5} + 1)}{\ln x} dx$ сходится по признаку Дирихле.

Поэтому интеграл $\int_2^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится.

2) Исследуем обычную сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} f(x) dx$. Интеграл сходится по признаку Дирихле:

$$a) \forall A \geq 1 \text{ имеем } \left| \int_1^A \cos \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{2} \right) dx \right| = 5 \left| \int_1^A \cos \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{2} \right) d \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{2} \right) \right| \leq 10;$$

б) функция $\frac{1}{2 \ln x + 1}$ монотонно убывает к нулю на $[1, +\infty)$.

Ответ: интеграл сходится условно.

538. $+\infty$ есть единственная особая точка на промежутке интегрирования.

1) Исследуем интеграл на абсолютную (условную) сходимость, т. е. выясним сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ (нижний предел заменён на 1, это не влияет на сходимость):

$$|f(x)| = |\cos x| \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x+1} \sim |\cos x| \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+1} \sim \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} \geq \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} \right)$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} dx$ сходится по признаку

Дирихле, поэтому интеграл $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} \right) dx$ расходится как сумма рас-

ходящегося и сходящегося интеграла. Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$, а

значит и интеграл $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$, расходится, т. е. абсолютной сходимости нет.

2) Исследуем обычную сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} f(x)dx$. Имеем: а) $\forall A \geq 0$ имеем $\left| \int_1^A \cos x dx \right| \leq 2$; б) функция $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ является суперпозицией двух функций: возрастающей функции $\operatorname{arctg} t$ и убывающей функции $t(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$, т. к.

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0 \quad \forall x > 1,$$

откуда следует монотонное убывание функции $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ при $x > 1$. Вычислив предел, убеждаемся, что данная функция стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Тогда разобьём интеграл: $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx = I_1 + I_2$, где I_1 – интеграл Римана, а I_2 сходится по признаку Дирихле, их сумма также сходится. Ответ: интеграл сходится условно.

539. Единственная особая точка $+\infty$.

1) Исследуем интеграл на абсолютную (условную) сходимость, т. е. выясним сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{|\cos \frac{x}{2}|}{\ln(1+x)} \cdot \operatorname{arctg} x \sim \frac{|\cos \frac{x}{2}|}{\ln x} \cdot \operatorname{arctg} x \sim \frac{|\cos \frac{x}{2}|}{\ln x} \cdot \frac{\pi}{2} \geq \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\ln x} \cdot \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{\cos x}{\ln x} \right). \end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ ($\forall x \geq 2$), то интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$ расходится, а интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x dx}{\ln x}$ сходится по признаку Дирихле. Тогда интеграл $\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{\cos x}{\ln x} \right) dx$ расходится как сумма расходящегося и сходящегося интегралов, т. е. интеграл $\int_2^{+\infty} |f(x)|dx$, а значит и интеграл $\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$, расходится.

2) Исследуем интеграл на обычную сходимость. Имеем $\int_1^{+\infty} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\ln(1+x)} dx$ сходится по признаку Дирихле. Функция $\operatorname{arctg} x$ возрастает на $[1, +\infty)$ и ограничена. Поэтому интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится по признаку Абеля.

Ответ: интеграл сходится условно.

540. Сделав замену $t = \operatorname{tg} x$, приходим к интегралу $\int_0^{+\infty} \frac{t+2}{1+t^2} \cdot \sin t dt$. Единственная особая точка $+\infty$.

1) Исследуем интеграл на абсолютную (условную) сходимость, т. е. выясним сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$:

$$|f(t)| = \frac{t+2}{1+t^2} \cdot |\sin t| \sim \frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - \frac{\cos 2t}{t} \right).$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ расходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t dt}{t}$ сходится по признаку Дирихле. Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$, а значит и интеграл $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$, расходится.

2) Исследуем сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} f(t) dt$. Покажем, что функция $\frac{t+2}{1+t^2}$ монотонно убывает. В самом деле, $\left(\frac{t+2}{1+t^2} \right)' = -\frac{t^2+4t-1}{(1+t^2)^2} < 0$ при $t > 1$. Легко видеть, что эта функция стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$. По признаку Дирихле интеграл $\int_1^{+\infty} f(t) dt$, а значит и интеграл $\int_0^{+\infty} f(t) dt$, сходится.

Ответ: интеграл сходится условно.

541. Единственная особая точка $+\infty$. Исследуем сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$:

$$0 \leq |f(x)| = \frac{|\cos(x+2)|}{\ln^2(x+1)} \cdot \sin \frac{1}{x} \sim \frac{|\cos(x+2)|}{x \ln^2 x} \leq \frac{1}{x \ln^2 x}.$$

Интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$, т. е. сходится. Значит, интеграл $\int_2^{+\infty} |f(t)| dt$ сходится, а значит, интеграл $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt = \int_1^2 |f(t)| dt + \int_2^{+\infty} |f(t)| dt$ сходится как сумма интеграла Римана и сходящегося несобственного интеграла. Ответ: исходный интеграл сходится абсолютно.

542. Положим $t = x^q$, тогда $x = t^{\frac{1}{q}}$, $dx = \frac{1}{q} \cdot t^{\frac{1}{q}-1} dt$. Пусть $q > 0$ (при $q < 0$ интеграл лишь поменяет знак, но на сходимость это не повлияет), тогда приходим к интегралу

$$I = \int_0^{+\infty} x^p \cdot \sin(x^q) dx = \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt.$$

Разобьём его на два интеграла, где в каждом имеется по одной особой точке:

$$I = \frac{1}{q} \int_0^A \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt + \frac{1}{q} \int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt = I_1 + I_2.$$

1) *Сходимость*. При $t \rightarrow +0$ имеем $\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} = O^*\left(\frac{1}{t^{\frac{p+1}{q}}}\right)$, поэтому интеграл I_1 сходится (абсолютно), если $-\frac{p+1}{q} < 1$, т. е. $\frac{p+1}{q} > -1$ (при $\frac{p+1}{q} \leq -1$ интеграл I_1 расходится).

Интеграл I_2 по признаку Дирихле сходится, если $1 - \frac{p+1}{q} > 0$, т. е. $\frac{p+1}{q} < 1$. По критерию Коши мы ранее доказывали, что при условии $1 - \frac{p+1}{q} \leq 0$ интеграл расходится. Интеграл I сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба интеграла I_1 и I_2 , т. е. при $-1 < \frac{p+1}{q} < 1$.

2) *Абсолютная сходимость*. На абсолютную сходимость имеет смысл исследовать интеграл I при тех значениях p и q , при которых исходный интеграл сходится, т. е. при $-1 < \frac{p+1}{q} < 1$. Разобьём интеграл на два интеграла, чтобы в каждом было по одной особой точке:

$$\bar{I} = \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt = \frac{1}{q} \int_0^A \frac{|\sin t|}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt + \frac{1}{q} \int_A^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt = \bar{I}_1 + \bar{I}_2.$$

Выше мы уже установили с помощью 3-го признака сравнения, что интеграл $\bar{I}_1$ сходится, поэтому осталось исследовать сходимость $\bar{I}_2$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_1 + \frac{1}{2}J_2 &= \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt = \int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt \leq \\ &\leq \bar{I}_2 = \int_A^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt \leq \int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} = J_1. \end{aligned}$$

При условии $1 - \frac{p+1}{q} > 1$, т. е. $\frac{p+1}{q} < 0$, интеграл J_1 сходится, но тогда будет сходиться интеграл $\bar{I}_2$, что означает абсолютную сходимость интеграла I_2 . При условии $1 - \frac{p+1}{q} \leq 1$, т. е. $\frac{p+1}{q} \geq 0$, интеграл J_1 расходится, интеграл J_2 сходится (по признаку Дирихле), следовательно, их разность расходится. Но тогда будет расходиться и интеграл $\bar{I}_2$, что означает абсолютную расходимость интеграла I_2 .

Таким образом, интеграл I_2 сходится абсолютно при $\frac{p+1}{q} < 0$ и абсолютно расходится при $\frac{p+1}{q} \geq 0$.

Ответ: при $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$ интеграл сходится абсолютно, при $0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$ интеграл сходится условно, в остальных случаях расходится.

543. Положим $t = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, тогда $dx = \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$, и приходим к интегралу

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}} dt = \int_1^A \frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}} dt = I_1 + I_2.$$

1) При $t \rightarrow 1+0$ имеем $\frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}} = O^*\left(\frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{2}}}\right)$, и так как $\frac{1}{2} < 1$, то по 3-му признаку сравнения интеграл I_1 сходится (абсолютно).

2) При $t \rightarrow +\infty$ имеем $\int_A^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t\sqrt{t^2-1}} dt \leq \int_A^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = J$, а $\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} = O^*\left(\frac{1}{t^2}\right)$. По 3-му признаку сравнения интеграл J сходится, а значит, по теореме сравнения, сходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t\sqrt{t^2-1}} dt$, что означает абсолютную сходимость интеграла I_2 . Ответ: интеграл сходится абсолютно.

544. Положим $t = e^x$, тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$ и приходим к интегралу $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cdot \cos t dt$. Единственная особая точка $t = +\infty$.

1) Исследуем на сходимость. Так как при $t \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{\ln^2 t}{t} \rightarrow 0$ монотонно (производная отрицательна), а первообразная от $\cos t$ ограничена, то по признаку Дирихле интеграл сходится.

2) Исследуем на абсолютную сходимость. Имеем

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t dt}{t} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t \cdot \cos 2t dt}{t} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t \cdot \cos^2 t}{t} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t \cdot |\cos t|}{t} dt.$$

Так как $\frac{\ln^2 t}{t} > \frac{1}{t}$ при $t > e$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ расходится, то первый из интегралов слева расходится, а второй сходится (по Дирихле), и значит, их сумма расходится. Это, в свою очередь, означает, что исследуемый интеграл абсолютно расходится.

Ответ: интеграл сходится условно.

545. Замена $t = e^x$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$ приводит к интегралу:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t\sqrt{\ln(\ln t + 1)}} dt = \int_1^2 \dots + \int_2^{+\infty} \dots = I_1 + I_2.$$

1) Исследуем интеграл на сходимость. При $t \rightarrow 1$ имеем: $\ln t = \ln(1 + (t - 1)) \sim t - 1 \Rightarrow \ln(\ln t + 1) \sim \ln t \sim t - 1$. Если обозначить подынтегральную функцию через $f(t)$, то при $t \rightarrow 1$ получаем $f(t) = O^*\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)$, поэтому интеграл I_1 сходится ($\frac{1}{2} < 1$), причём абсолютно.

При $t \rightarrow +\infty$ имеем: $\left| \int_2^A \cos t dt \right| \leq 2 \quad \forall A \geq 2$, $\frac{1}{t\sqrt{\ln(\ln t + 1)}} \rightarrow 0$ монотонно. По признаку Дирихле интеграл I_2 сходится. Следовательно, интеграл $I = I_1 + I_2$ также сходится.

2) Исследуем интеграл I на абсолютную сходимость. Рассмотрим интеграл

$$\bar{I} = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t\sqrt{\ln(\ln t + 1)}} dt = \int_1^2 \dots + \int_2^{+\infty} \dots = \bar{I}_1 + \bar{I}_2.$$

Так как интеграл $\bar{I}_1$ сходится (см. выше), то осталось исследовать сходимость $\bar{I}_2$. Заметим, что интеграл $\bar{I}_2$ сходится и расходится одновременно с интегралом

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t\sqrt{\ln(\ln t)}} dt &\geq \int_2^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t\sqrt{\ln(\ln t)}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{\ln(\ln t)}} + \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{\cos 2t dt}{t\sqrt{\ln(\ln t)}} = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Интеграл J_2 сходится по признаку Дирихле. Покажем, что интеграл J_1 расходится. Действительно,

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{\ln(\ln t)}} > \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}} = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln t)}{\sqrt{\ln t}},$$

а последний интеграл расходится. Следовательно, интеграл $\bar{I}$ расходится, т. е. исходный интеграл сходится лишь условно. Ответ: интеграл сходится условно.

546. Сходимость интеграла была доказана с помощью признака Абеля на предыдущем семинаре. Выясним точнее тип сходимости (абсолютная или условная). Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \cdot \operatorname{th} x dx = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x}{x} \cdot |\sin x| dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x}{x} \cdot \sin^2 x dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x}{x} (1 - \cos 2x) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x}{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x}{x} \cdot \cos 2x dx = I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

Интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле, так как $\left| \int_1^a \cos 2x dx \right| \leq 2 \forall a \geq 1$, $\frac{\operatorname{th} x}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ монотонно убывая. Действительно, покажем отрицательность производной: $\left(\frac{\operatorname{th} x}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \cdot x - \operatorname{th} x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \cdot x < \operatorname{th} x \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \cdot x < \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \Leftrightarrow 2x < \operatorname{sh} 2x$ — верно. Интеграл I_1 расходится, поскольку при $x \rightarrow +\infty \frac{\operatorname{th} x}{x} \sim \frac{1}{x}$. Следовательно, абсолютной сходимости нет и исследуемый интеграл сходится условно.

547. Сделаем замену $t = 1/x^3$ и придём к интегралу $I = \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{4-p}{3}}} dt$.

1) Исследуем сходимость интеграла в окрестности единственной особой точки $+\infty$. По признаку Дирихле этот интеграл сходится, если $\frac{4-p}{3} > 0$, т. е.

$p < 4$ (поскольку $\left| \int_1^A \cos t dt \right| \leq 2 \forall A \geq 1$, а функция $\frac{1}{t^{\frac{4-p}{3}}} \rightarrow 0$ монотонно при $t \rightarrow +\infty$). Используя критерий Коши, можно доказать расходимость интеграла при $p \geq 4$.

2) Исследуем данный интеграл при $p < 4$ на абсолютную (условную) сходимость. В силу оценок

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{4-p}{3}}} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t dt}{t^{\frac{4-p}{3}}} = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^{\frac{4-p}{3}}} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t^{\frac{4-p}{3}}} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{4-p}{3}}},$$

или

$$I_1 + I_2 \leq \bar{I} \leq I_1, \text{ где } I_1 = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{4-p}{3}}}, \bar{I} = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t^{\frac{4-p}{3}}} dt.$$

При $\frac{4-p}{3} > 1$ интеграл I_1 , мажорирующий $\bar{I}$, сходится $\Rightarrow \bar{I}$ сходится $\Rightarrow I$ сходится абсолютно. С другой стороны, при $\frac{4-p}{3} \leq 1$ интеграл I_1 расходится, но I_2 сходится (по Дирихле) $\Rightarrow I_1 + I_2$ расходится $\Rightarrow \bar{I}$ расходится $\Rightarrow I$ сходится лишь условно.

Ответ: при $-\infty < p < 1$ интеграл сходится абсолютно, при $1 \leq p < 4$ сходится условно, при $p \geq 4$ — расходится.

548. Ответ: при $q > -1$ интеграл сходится абсолютно, при $-3 < q \leq -1$ сходится условно, при $q \leq -3$ — расходится. См. решение предыдущей задачи.

549. Промежуток интегрирования содержит две особые точки, поэтому разобьём интеграл на два интеграла и исследуем сходимость каждого из них:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{(\ln x)^{-p}} dx = \int_1^2 \frac{\cos x}{(\ln x)^{-p}} dx + \int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{(\ln x)^{-p}} dx = I_1 + I_2.$$

1) *Сходимость.* Исследуем сходимость I_1 : при $x \rightarrow 1$ $\ln x = \ln(1 + (x - 1)) \sim x - 1$, поэтому подынтегральная функция $f(x) = O(\frac{1}{(x-1)^{-p}})$ и по признаку сравнения со степенью сходится, причём абсолютно, тогда и только тогда, когда $-p < 1$, т. е. при $p > -1$.

Исследуем сходимость I_2 : при $x \rightarrow +\infty$ и $p < 0$ интеграл сходится по признаку Дирихле ($|\int_2^A \cos x dx| \leq 2 \forall A \geq 2$; $\frac{1}{(\ln x)^{-p}} \rightarrow 0$ монотонно), а при $p \geq 0$, очевидно, расходится.

Тогда интеграл I сходится при $p \in (-1, 0)$.

2) *Абсолютная (условная) сходимость.* Рассмотрим при $p \in (-1, 0)$ интеграл

$$\bar{I} = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{(\ln x)^{-p}} dx = \int_1^2 \frac{|\cos x|}{(\ln x)^{-p}} dx + \int_2^{+\infty} \frac{|\cos x|}{(\ln x)^{-p}} dx = \bar{I}_1 + \bar{I}_2.$$

Выше было показано, что $\bar{I}_1$ сходится. Осталось исследовать сходимость $\bar{I}_2$.

$$\bar{I}_2 = \int_2^{+\infty} \frac{|\cos x|}{(\ln x)^{-p}} dx \geq \int_2^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(\ln x)^{-p}} dx = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{-p}} + \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(\ln x)^{-p}} dx.$$

Второй из интегралов при $p \in (-1, 0)$ сходится по признаку Дирихле, в то время как первый

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{-p}} \geq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^{-p}} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^{-p}} = \frac{(\ln x)^{p+1}}{p+1} \Big|_2^{+\infty} = +\infty,$$

т. е. расходится. Значит, $\bar{I}$ расходится, т. е. исходный интеграл сходится (условно) при $p \in (-1, 0)$. Ответ: сходится (условно) при $p \in (-1, 0)$.

550. Разобьём исходный интеграл I на два интеграла:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p \cdot \sin x}{1 + x^q} dx = \int_0^A \frac{x^p \cdot \sin x}{1 + x^q} dx + \int_A^{+\infty} \frac{x^p \cdot \sin x}{1 + x^q} dx = I_1 + I_2.$$

1) Исследуем на обычную сходимость. При $x \rightarrow +0$ имеем $\frac{x^p \cdot \sin x}{1 + x^q} = O^*\left(\frac{1}{x^{-p-1}}\right)$. Следовательно, при $-p - 1 < 1$, т. е. $p > -2$,

по 3-му признаку сравнения интеграл I_1 сходится (абсолютно), а при $p \leq -2$ расходится.

При $x \rightarrow +\infty$ и $p < q$ имеем $\frac{x^p}{1+x^q} \sim \frac{1}{x^{q-p}} \rightarrow 0$ монотонно, а первообразная от $\sin x$ ограничена, следовательно, I_2 по признаку Дирихле сходится. Таким образом, интеграл I сходится (неабсолютно), если $p > -2$, $p < q$.

2) Исследуем на абсолютную сходимость. При $x > A$ верны оценки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2 &= \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{x^p \cos 2x}{1+x^q} dx = \\ &= \int_A^{+\infty} \frac{x^p \sin^2 x}{1+x^q} dx \leq \int_A^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx \leq \int_A^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx = J_1. \end{aligned}$$

Так как при $x \rightarrow +\infty$ и $p < q$ имеем $\frac{x^p}{1+x^q} = O^*\left(\frac{1}{x^{q-p}}\right)$, то интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{x^p dx}{1+x^q}$ сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^{q-p}}$, т. е. сходится при $q-p > 1$. Значит, при $q-p > 1$ интеграл I_2 сходится абсолютно. При $0 < q-p \leq 1$ интеграл J_1 расходится, интеграл J_2 сходится (по признаку Дирихле), их разность $\frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2$ расходится, следовательно, интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx$ расходится, а I_2 расходится абсолютно.

Ответ: интеграл I сходится абсолютно при $p > -2$, $q > p+1$; сходится условно при $p > -2$, $p < q \leq p+1$.

551. Положим $t = x^2$, тогда $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ и приходим к интегралу

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t^{\frac{q}{2}})t^{\frac{1-p}{2}}} dt.$$

Особая точка: $t = +\infty$.

1) *Сходимость.* При $t \rightarrow +\infty$ и $q \geq 0$ имеем $\frac{1}{(1+t^{\frac{q}{2}})t^{\frac{1-p}{2}}} = O^*\left(\frac{1}{t^{\frac{1-p+q}{2}}}\right)$, причём функция $\frac{1}{t^{\frac{1-p+q}{2}}} \rightarrow 0$ монотонно при $1-p+q > 0$, т. е. $p < 1+q$. Так как при этом первообразная от $\sin t$ ограничена, то интеграл сходится по признаку Дирихле.

При $t \rightarrow +\infty$ и $q < 0$ имеем $\frac{1}{(1+t^{\frac{q}{2}})t^{\frac{1-p}{2}}} = O^*\left(\frac{1}{t^{\frac{1-p}{2}}}\right)$, следовательно, при $1-p > 0$ интеграл сходится по признаку Дирихле.

2) *Абсолютная (условная) сходимость.* Пусть $q \geq 0$, тогда обозначим $\bar{I} = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{(1+t^{\frac{q}{2}})t^{\frac{1-p}{2}}} dt$. Этот интеграл сходится и расходится одновременно с

$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{1-p+q}{2}}} dt$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2 &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{1-p+q}{2}}} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^{\frac{1-p+q}{2}}} dt = \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{\frac{1-p+q}{2}}} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{1-p+q}{2}}} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{1-p+q}{2}}} = J_1. \end{aligned}$$

При $t \rightarrow +\infty$ и $q \geq 0$ интеграл J_1 по 3-му признаку сравнения сходится при $\frac{1-p+q}{2} > 1$ и расходится при $\frac{1-p+q}{2} \leq 1$. Из сходимости J_1 при $\frac{1-p+q}{2} > 1$ следует сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{1-p+q}{2}}} dt$, что означает, в свою очередь, абсолютную сходимость исходного интеграла.

Из расходимости при $0 < \frac{1-p+q}{2} \leq 1$ интеграла J_1 и сходимости интеграла J_2 вытекает расходимость $\frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2$, что влечёт расходимость $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{1-p+q}{2}}} dt$. А это, в свою очередь, означает, что при $0 < \frac{1-p+q}{2} \leq 1$ исходный интеграл не сходится абсолютно, т. е. сходится лишь условно.

Наконец, если $q < 0$, то аналогично получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2 &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{1-p}{2}}} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^{\frac{1-p}{2}}} dt = \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{\frac{1-p}{2}}} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{1-p}{2}}} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{1-p}{2}}} = J_1. \end{aligned}$$

При $t \rightarrow +\infty$ и $q < 0$ интеграл J_1 по 3-му признаку сравнения сходится при $\frac{1-p}{2} > 1$ и расходится при $\frac{1-p}{2} \leq 1$. Из сходимости J_1 при $\frac{1-p}{2} > 1$ следует сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{1-p}{2}}} dt$, что означает, в свою очередь, абсолютную сходимость исходного интеграла.

Из расходимости при $0 < \frac{1-p}{2} \leq 1$ интеграла J_1 и сходимости интеграла J_2 вытекает расходимость $\frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2$, что влечёт расходимость $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{1-p}{2}}} dt$. А это, в свою очередь, означает, что при $0 < \frac{1-p}{2} \leq 1$ исходный интеграл сходится условно.

Ответ: если $q \geq 0$, то при $p < q - 1$ интеграл сходится абсолютно, при $q - 1 \leq p < q + 1$ сходится условно, в остальных случаях расходится;

если $q < 0$, то при $p < -1$ интеграл сходится абсолютно, при $-1 \leq p < 1$ сходится условно, при $p \geq 1$ расходится.

552. 1) *Сходимость.* На границе промежутка интегрирования имеется одна особая точка $x = +\infty$. Так как при $p \leq 0$ имеем $\left| \int_2^A \sin x dx \right| \leq 2 \quad \forall A \geq 2$, $\frac{1}{x^{-p} \ln x} \rightarrow 0$ монотонно при $x \rightarrow +\infty$, то по признаку Дирихле интеграл сходится.

При $p > 0$ расходимость интеграла доказывается по критерию Коши. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall A \geq a \exists A', A'' \geq A : \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| > \varepsilon$. Так как $\forall A \geq 2 \exists n \in \mathbb{N}$ такое что $2\pi n > A$, то возьмём в качестве A' и A'' числа $2\pi n$ и $\pi + 2\pi n$:

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x^{-p} \ln x} dx \right| = \left| \int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \frac{\sin x}{x^{-p} \ln x} dx \right| = \frac{1}{\xi^{-p} \ln \xi} \int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \sin x dx = \frac{2}{\xi^{-p} \ln \xi} > 2,$$

$2\pi n \leq \xi \leq \pi + 2\pi n$, если выбрать $0 < \varepsilon < 2$ (поскольку $\frac{2}{\xi^{-p} \ln \xi} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$).

2) *Абсолютная (условная) сходимость.* При $p \leq 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{-p} \ln x} - \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^{-p} \ln x} &= \int_2^{+\infty} \frac{x^p \sin^2 x}{\ln x} dx \leq \\ &\leq \int_2^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{\ln x} dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{-p} \ln x} = J. \end{aligned}$$

Исследуем сходимость интеграла $J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{-p} \ln x}$. Воспользуемся 2-м признаком сравнения.

а) Пусть $p < -1$, $g(x) = \frac{1}{x^k}$, где $k > 1$. Так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(x^{-p} \ln x)}{1/x^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{k+p}}{\ln x} = 0,$$

если $k + p \leq 0$, т. е. $p \leq -k < -1$, то из сходимости интеграла $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^k}$ следует сходимость интеграла J .

б) Пусть $p \in (-1, 0]$, $g(x) = \frac{1}{x^k}$, где $k \leq 1$. Так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{x^{-p} \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{k+p}}{\ln x} = +\infty,$$

если $k + p > 0$, т. е. $p > -k \geq -1$, то из расходимости интеграла $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^k}$ следует расходимость интеграла J .

в) При $p = -1$ имеем:

$$J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| \Big|_2^{+\infty} = +\infty \text{ (расходится.)}$$

Ответ: при $p < -1$ исходный интеграл сходится абсолютно, при $p \in [-1, 0]$ условно, при $p > 0$ расходится.

553. Поскольку $P_n(x) > 0$ при $x \geq a \geq 0$, то единственная особая точка — это $+\infty$.

1) Исследуем на *сходимость*. При $x \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O^*\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$ и стремится к 0 монотонно, если $n - m > 0$. При этом $|\int_a^A \sin x dx| \leq 2 \forall A \geq a$. Поэтому по признаку Дирихле интеграл сходится при $n - m > 0$ (по критерию Коши ранее доказывалось, что в противном случае интегралы такого вида расходятся).

2) Выясним *абсолютную сходимость* (при $n - m > 0$). Для этого исследуем сходимость интеграла $\bar{I} = \int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)| |\sin x|}{P_n(x)} dx$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_1 - \frac{1}{2} J_2 &= \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)} dx - \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)| \cos 2x}{P_n(x)} dx = \\ &= \int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)| \sin^2 x}{P_n(x)} dx \leq \bar{I} \leq \int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)} dx = J_1. \end{aligned}$$

Так как при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O^*\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$, то интеграл J_1 сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{n-m}}$, который по 3-му признаку сравнения сходится при $n - m > 1$ и расходится при $n - m \leq 1$. Из сходимости J_1 при $n - m > 1$ следует сходимость $\bar{I}$, что означает, в свою очередь, абсолютную сходимость исходного интеграла.

Из расходимости при $0 < n - m \leq 1$ интеграла J_1 и сходимости интеграла J_2 вытекает расходимость $\frac{1}{2} J_1 - \frac{1}{2} J_2$, что влечёт расходимость $\bar{I}$. А это, в свою очередь, означает, что при $m < n \leq m + 1$ исходный интеграл не сходится абсолютно, т. е. сходится лишь условно.

Ответ: при $n > m + 1$ интеграл сходится абсолютно, при $m < n \leq m + 1$ сходится условно, в остальных случаях расходится.

13 СЕМИНАР: Вычисление площади плоской фигуры

*«Представьте, что вы стоите на поверхности Земли.
Вы проходите одну милю на юг, одну на запад и одну на север
и оказываетесь в той же точке, откуда начали движение.
Где вы находитесь?»*

*Задача Илона Маска, которую он задаёт соискателям
на собеседовании при устройстве на работу
в его компании SpaceX и Tesla.*

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Обратимся к вопросу о вычислении площадей плоских фигур при помощи интегралов Римана и несобственных интегралов. Но прежде чем заняться вычислением площадей фигур, ответим на вопрос: что такое площадь? Как она определяется?

13.1 Квадрируемость. Понятие площади

Назовём *многоугольной фигурой* на плоскости множество, являющееся объединением конечного числа лежащих в этой плоскости многоугольников (понятия многоугольника, а также его площади вводились в курсе средней школы).¹ Две фигуры P_1 и P_2 называются *равными*, если существует взаимно однозначное отображение фигуры P_1 на фигуру P_2 , сохраняющее расстояния между точками.

Напомним, как аксиоматически вводилось понятие площади $S(P)$ многоугольной фигуры P в курсе элементарной математики. Площадь многоугольной фигуры – это неотрицательное число, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам).

1. (*Инвариантность*). Если две многоугольные фигуры P_1 и P_2 равны между собой, то

$$S(P_1) = S(P_2).$$

2. (*Аддитивность*). Если P_1 и P_2 – две многоугольные фигуры без общих

¹ «Многоугольником называется конечная часть плоскости, ограниченная простой (без самопересечений) замкнутой ломаной, у которой соседние звенья не лежат на одной прямой». А.В. Погорелов. Геометрия: Учебник для 7–11 кл. общеобразоват. учреждений. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 1995 (стр. 202).

внутренних точек и символ $P_1 \cup P_2$ обозначает объединение этих фигур, то

$$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2).$$

3. (Существование единицы). Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения длины, равна единице измерения площади.

Обобщим понятие площади на случай произвольной ограниченной плоской фигуры.

Понятие площади произвольной плоской фигуры. Назовём *плоской фигурой* любое непустое ограниченное множество $F \subset \mathbb{R}^2$ и введём общее понятие площади для произвольной плоской фигуры F .

Рассмотрим всевозможные многоугольные фигуры P , целиком содержащиеся в F , а также многоугольные фигуры Q , целиком содержащие F . Фигуры P будем называть «*вписанными в F* », а фигуры Q – «*описанными около F* ». Заметим, что числовое множество $S(P)$ площадей всех вписанных многоугольных фигур P ограничено сверху, например, площадью любой описанной многоугольной фигуры Q . Поэтому это множество имеет конечную точную верхнюю грань, которую обозначим

$$\underline{S} = \sup_{P \subseteq F} S(P),$$

которую будем называть *нижней площадью* фигуры F . Если в фигуру F нельзя вписать ни одной многоугольной фигуры, то по определению полагается $\underline{S} = 0$.

Аналогично, числовое множество $S(Q)$ площадей всех описанных около фигуры F многоугольных фигур Q ограничено снизу, например, площадью любой вписанной многоугольной фигуры или нулём, и поэтому у него существует конечная точная нижняя грань

$$\overline{S} = \inf_{Q \supseteq F} S(Q),$$

называемая *верхней площадью* фигуры F . Очевидно, что $\underline{S} \leq \overline{S}$. Плоская фигура F называется *квадрируемой* (т. е. имеющей конечную площадь), если

$$\underline{S} = \overline{S}.$$

Число $S = \underline{S} = \overline{S}$ называется при этом *площадью* фигуры F (по Жордану).¹ Будем говорить, что плоская фигура F имеет площадь, равную нулю, если эта фигура содержится в многоугольной фигуре сколь угодно малой площади.

¹Нижнюю и верхнюю площади фигуры также называют, соответственно, *внутренней* и *внешней мерами Жордана* фигуры F . В случае, когда они равны, то говорят, что множество F *измеримо*, а его площадь S называют также *мерой Жордана* фигуры F . Вместо термина «квадрируемость» можно использовать термин «измеримость по Жордану».

Перечисленные выше характеристики площади многоугольных фигур (неотрицательность, аддитивность, инвариантность, существование единицы) сохраняются и для произвольных квадратуемых фигур.

Замечание 1. Подчеркнём, что свойство аддитивности выполняется для объединения любого конечного числа $F_1, F_2, \dots, F_n$ квадратуемых фигур без общих внутренних точек:

$$S(F) = \sum_{k=1}^n S(F_k),$$

но уже объединение счётной совокупности квадратуемых фигур не является, вообще говоря, квадратуемой фигурой. Приведём соответствующий пример.

Пример 179. Рассмотрим множество F всех точек с рациональными координатами, принадлежащих квадрату $[0, 1] \times [0, 1]$. Оно представляет собой счётное объединение квадратуемых фигур (точка, очевидно, является квадратуемой фигурой нулевой площади). Верхняя площадь данной фигуры $\bar{S}(F) = 1$, поскольку наименьшим многоугольником, содержащим множество F , является сам квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$; нижняя же площадь $\underline{S}(F) = 0$, поскольку в множество F нельзя вписать никакую многоугольную фигуру ненулевой площади. Это означает, что фигура F не является квадратуемой. $\square$

Замечание 2. Непустое пересечение двух (конечного числа) квадратуемых фигур есть квадратуемая фигура.

Необходимые и достаточные условия квадратуемости плоской фигуры.

Теорема 1 (*необходимое и достаточное условие квадратуемости, 1-я формулировка*). Для квадратуемости плоской фигуры F необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись такая описанная вокруг F многоугольная фигура Q и такая вписанная в F многоугольная фигура P , для которых

$$S(Q) - S(P) < \varepsilon.$$

Теорема 1 допускает обобщение: в её формулировке вместо описанной и вписанной *многоугольных* фигур Q и P можно взять произвольные описанную и вписанную *квадратуемые* плоские фигуры Q и P . А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (*необходимое и достаточное условие квадратуемости, 2-я формулировка*). Для квадратуемости плоской фигуры F необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась такая содержащая F квадратуемая плоская фигура Q и такая содержащаяся в F квадратуемая плоская фигура P , для которых

$$S(Q) - S(P) < \varepsilon.$$

Чтобы сформулировать далее третью формулировку теорем 1 и 2, приведём необходимые определения из теории множеств.¹

Теорема 3 (*необходимое и достаточное условие квадратуемости, 3-я формулировка*). Для того чтобы плоская фигура F была квадратуемой, необходимо и достаточно, чтобы её граница ∂F имела площадь нуль.¹

Следствие (*достаточное условие квадратуемости*). Для того чтобы плоская фигура была квадратуемой, достаточно, чтобы её граница была спрямляемой кривой.

Приведённые теоремы описывают достаточно широкий класс квадратуемых фигур. Выделим две основные группы квадратуемых фигур, чаще других встречающиеся при решении задач на вычисление площадей.

1. Если плоская фигура F ограничена несколькими непрерывными кривыми, каждая из которых определяется явным уравнением $y = y(x)$ или $x = x(y)$, то эта фигура квадратуема.

2. Если плоская фигура F ограничена одной или несколькими гладкими² кривыми, то она квадратуема.

Далее обратимся к известным прикладным задачам, для решения которых используются определённые интегралы.

13.2 Площадь в прямоугольных координатах

*«Наука должна быть весёлая, увлекательная и простая.
Таковыми же должны быть и учёные».*

*Петр Капица (1894–1984) – советский физик,
инженер и инноватор. Лауреат Нобелевской премии.*

¹Пусть точка $M(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Назовём ε -окрестностью точки M множество точек плоскости, расположенных внутри круга радиуса ε с центром в точке M , т. е. $U_\varepsilon(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$. Пусть F – произвольное непустое подмножество $\mathbb{R}^2$. Точка $M \in F$ называется *внутренней* точкой множества F , если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(M) \subset F$. Точка M называется *внешней* точкой множества F , если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(M) \subset \mathbb{R}^2 \setminus F$. Точку M назовём *граничной* точкой множества F , если эта точка не является ни внутренней, ни внешней точкой F . Заметим, что точка M является граничной точкой множества F тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в ε -окрестности точки M содержатся как точки, принадлежащие F , так и точки, ему не принадлежащие. Совокупность всех граничных точек F называется его *границей*.

¹Таким образом, площадь квадратуемой фигуры равна одному и тому же числу, независимо от того, с границей или без границы рассматривается эта фигура.

²Назовём кривую, заданную параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [T_0, T]$, *гладкой*, если: 1) функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ имеют непрерывные производные на всём промежутке изменения параметра; 2) на кривой нет ни кратных, ни вообще особых точек (Математика. Большой энциклопедический словарь / Под ред. Ю.В. Прохорова. – 3-е изд. – М.: Большая российская энциклопедия, 2000, стр. 441).

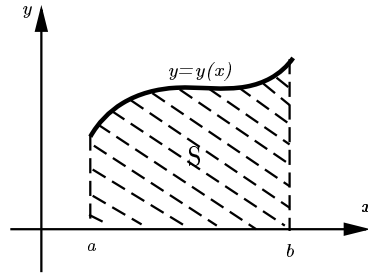


Рис. А

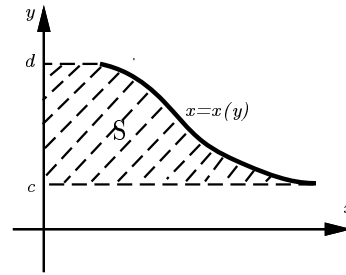


Рис. В

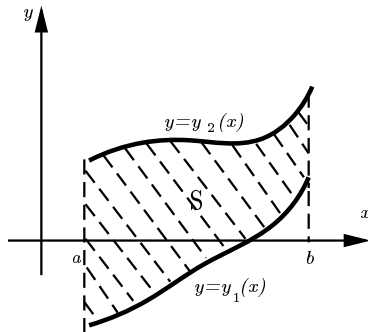


Рис. С

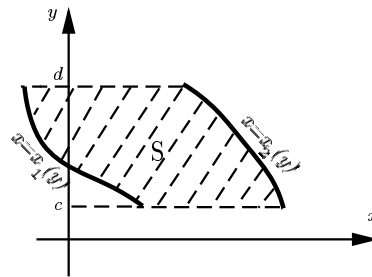


Рис. D

Рис. 110: Простейшие случаи криволинейных трапеций

При вычислении площадей плоских фигур мы будем использовать геометрический смысл определённого интеграла как площади соответствующей конечной (или даже бесконечной) криволинейной трапеции.

I. Случай явного задания границы.

1. Рассмотрим криволинейную трапецию

$$F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x)\},$$

прилежащую к оси абсцисс и ограниченную сверху графиком неотрицательной непрерывной функции $y = y(x)$, снизу – отрезком $[a, b]$ оси Ox , слева и справа – двумя отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$ (Рис. 110, А). (Отрезки прямых могут вырождаться в точку). Площадь S такой фигуры численно равна определённому интегралу

$$S = \int_a^b y(x) dx. \quad (1)$$

Пример 180. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -e^x$, $x = 1$ и координатными осями.

Решение. Учитывая отрицательность интегрируемой функции, найдём площадь по формуле (сделайте рисунок)

$$S = - \int_0^1 (-e^x) dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1 \text{ (кв. ед.)}. \square$$

2. Рассмотрим симметричный относительно координатных осей случай криволинейной трапеции

$$F = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq x(y)\},$$

прилежащей к оси ординат и ограниченной справа графиком неотрицательной непрерывной функции $x = x(y)$, слева – отрезком $[c, d]$ оси Oy , снизу и сверху – отрезками горизонтальных прямых $y = c$ и $y = d$ (Рис. 110,В). Её площадь находится по формуле

$$S = \int_c^d x(y) dy. \quad (2)$$

Как следствие п.1–п.2, получаем два обобщения.

3. Площадь S криволинейной трапеции

$$F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

ограниченной снизу и сверху графиками непрерывных функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ соответственно, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$ (Рис. 110,С) определяется по формуле

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx. \quad (3)$$

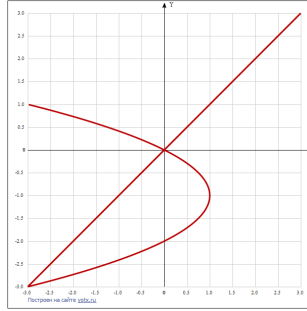
4. Площадь S криволинейной трапеции

$$F = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

ограниченной слева и справа графиками непрерывных функций $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ соответственно, снизу и сверху – прямыми $y = c$ и $y = d$ (Рис. 110,Д) определяется по формуле

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y)) dy. \quad (4)$$

Пример 181. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x = -2y - y^2$ и прямой $x = y$.

Рис. 111: Фигура, ограниченная кривыми $x = -2y - y^2$ и $x = y$.

Решение. Сделаем чертёж (Рис. 111) и найдём ординаты точек пересечения кривых: $-2y - y^2 = y \Leftrightarrow y = -3$ и $y = 0$. В данном случае удобно воспользоваться формулой (4):

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^0 ((-2y - y^2) - y) dy = \int_{-3}^0 (-3y - y^2) dy = \\ &= -\left(\frac{3y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right) \Big|_{-3}^0 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.) } \square \end{aligned}$$

Пример 182. Плоская фигура задаётся системой неравенств

$$0 \leq x \leq 4, \quad 2\sqrt{x} \leq y \leq 8 - x.$$

Решить задачу двумя способами: по формуле (3) и по формуле (4).

Решение. По формуле (3) имеем

$$S = \int_0^4 ((8 - x) - 2\sqrt{x}) dx = \dots = \frac{40}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

В то же время по формуле (4) приходим к сумме двух интегралов

$$S = \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy + \int_4^8 (8 - y) dy = \dots = \frac{40}{3} \text{ (кв. ед.) } \square$$

II. Площадь плоской фигуры в случае параметрического задания её границы. Базовые формулы (1),(2), а также их обобщения (3),(4) легко адаптируются на случай, когда кривая $y(x)$, ограничивающая сверху криволинейную трапецию, задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t), y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на сегменте $[T_0, T]$ функции.¹ При этом необходимо правильно согласовать пределы интегрирования. А именно,

¹Если $T_0 > T$, то на сегменте $[T, T_0]$.

в формулах ниже T_0 – значение параметра, отвечающее начальной точке обхода кривой в положительном направлении. Под *положительным направлением обхода* договорились считать направление обхода против часовой стрелки, при этом вычисляемая площадь остаётся с левой стороны. Величина T – конечное значение параметра, отвечающее конечной точке дуги кривой, проходимой в направлении против часовой стрелки. Иными словами, точка $(x(t), y(t))$ при изменении параметра t от T_0 до T пробегает границу так, что фигура остаётся слева от движущейся точки.

Переходя в формуле (1) к переменной интегрирования t , получим

$$S = - \int_{T_0}^T y(t)x'(t)dt, \quad (1.a)$$

где $x(T_0) = b$, $x(T) = a$. Аналогично формула (2) преобразуется к виду

$$S = \int_{T_0}^T x(t)y'(t)dt, \quad (2.a)$$

где $x(T_0) = c$, $x(T) = d$.

В случае, когда вычисляется площадь плоской фигуры, ограниченной кусочно-гладкой простой *замкнутой* кривой C (контуром), пробегаемой против часовой стрелки и ограничивающей слева от себя площадь S , справедливы обе формулы (1.a) и (2.a), а также производная от них симметричная формула

$$S = \frac{1}{2} \int_{T_0}^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt. \quad (5)$$

Пример 183. Найти площадь круга радиуса a

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t, \\ y(t) = a \sin t, \end{cases} \quad \text{где } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение. 1-й способ. Пользуясь симметрией круга, по формуле (1.a) найдём, например, четвёртую часть площади круга, заключённую в первой четверти:

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin t)(-a \sin t)dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

2-й способ. Можно было воспользоваться формулой (2.a):

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos t)(a \cos t)dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4} \text{ (кв. ед.)}$$

В рассмотренных случаях можно было сразу вычислять площадь всего круга, и тогда интегрировать в пределах от 0 до 2π .

3-й способ. Так как окружность представляет собой замкнутый контур, то можно было также использовать формулу (5):

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi a^2.$$

Ответ: площадь круга равна πa^2 (кв. ед.). $\square$

Пример 184. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t, \\ y(t) = t + 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad x = y.$$

Решение. Сделаем чертёж (Рис. 112). Фигура, площадь которой ищется, ограничена слева заданной параметрически параболой, а справа – прямой $x = y$. Здесь удобно воспользоваться формулой (4). Найдём значения параметра t , соответствующие точкам пересечения кривых (т. е. будущие пределы интегрирования T_0 и T):

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t, \\ y(t) = t + 1, \\ x(t) = y(t) \end{cases} \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

При этом $x_2(t) = t + 1$, $x_1(t) = t^2 + 2$. Перейдём в (4) к переменной интегрирования t :

$$\begin{aligned} S &= \int_c^d (x_2(y) - x_1(y)) dy = \int_{T_0}^{T_1} (x_2(t) - x_1(t)) \cdot y'(t) dt = \\ &= \int_{-1}^1 ((t + 1) - (t^2 + t)) dt = \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 1 \frac{1}{3} \text{ (кв. ед.) } \square \end{aligned}$$

13.3 Площадь в полярных координатах

*«Учёный — это не тот, кто даёт правильные ответы,
а тот, кто ставит правильные вопросы».*

*Клод Леви Стросс (1908–2009) – французский
этнолог, социолог, этнограф, философ и культуролог,
создатель собственного научного направления в
этнологии — структурной антропологии.*

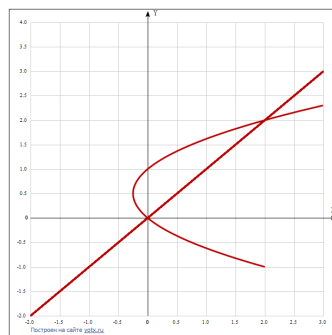


Рис. 112: Фигура, ограниченная $x(t) = t^2 + t$, $y(t) = t + 1$ и $x = y$.

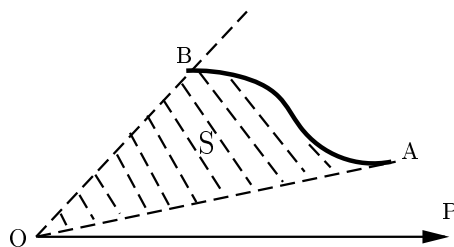


Рис. 113: Криволинейный сектор

I. Случай явного задания функции, определяющей границу.

а) *Случай функции $r = r(\varphi)$.* Пусть $r = r(\varphi)$ – положительная непрерывная функция, определённая на отрезке $[\varphi_0, \varphi_1]$. Рассмотрим криволинейный сектор, ограниченный дугой AB и отрезками лучей $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$, $0 < \varphi_1 - \varphi_0 < 2\pi$ (Рис. 113). Площадь данного сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (6)$$

б) *Случай функции $\varphi = \varphi(r)$.* Пусть теперь дуга AB кривой задана явно уравнением $\varphi = \varphi(r)$, где $\varphi(r)$ – возрастающая непрерывно дифференцируемая на отрезке $[r_0, r_1]$ функция, $r_0 = r(\varphi_0)$, $r_1 = r(\varphi_1)$. Переходя в формуле (6) к переменной интегрирования r , получим

$$S = \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_1} r^2 \varphi'(r) dr. \quad (7)$$

Рассмотрим примеры.

Пример 185. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$r = 2 \cos^2 \varphi.$$

Решение. Данная непрерывная функция (Рис. 114), во-первых, периодична с периодом π , а во-вторых, определена при всех $\varphi \in \mathbb{R}$ (это решения неравенства $r \geq 0$). Используя формулу понижения степени, приведём её к виду $r = 1 + \cos 2\varphi$ и, согласно формуле (6), получим (с учётом равенства площадей «лепестков»)

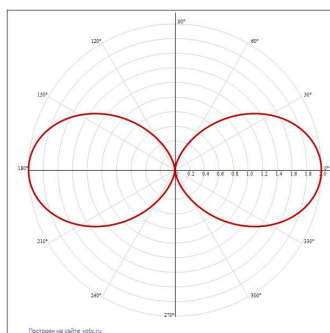
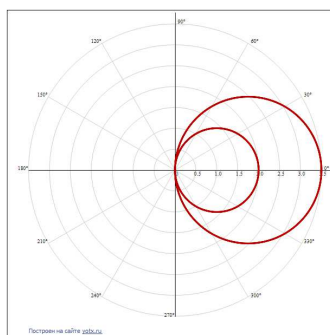
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) d\varphi = \\ &= \left(\frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2} \text{ (кв. ед.) } \square \end{aligned}$$

Пример 186. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$r = \frac{7}{2} \cos \varphi \quad \text{и} \quad r = 2 \cos \varphi.$$

Решение. Фигура имеет вид, изображённый на Рис. 115. Кривые периодичны с периодом $T = 2\pi$, при этом на отрезке $[-\pi, \pi]$ кривые определены только при $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (это нам надо для определения будущих пределов интегрирования). Для вычисления площади полученного «серпа» (учтём его симметрию относительно полярной оси) воспользуемся обобщением формулы (6):

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{7}{2} \cos \varphi \right)^2 - (2 \cos \varphi)^2 \right) d\varphi =$$

Рис. 114: Кривая $r = 2 \cos^2 \varphi$.Рис. 115: Кривые $r = \frac{7}{2} \cos \varphi$ и $r = 2 \cos \varphi$.

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{33}{4} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{33}{4} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{33}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{33\pi}{16} \text{ (кв. ед.) } \square$$

II. Случай параметрического задания кривой. Пусть граничная кривая задана в полярных координатах системой уравнений

$$\begin{cases} r = r(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases} \quad \text{где } t \in [T_0, T].$$

Если функции $r(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируемы на сегменте $[T_0, T]$, то для вычисления площади криволинейного сектора достаточно перейти к переменной интегрирования t в формулах (6) и (7).

III. Случай неявного задания кривой. Если граница (кривая) задана неявно уравнением $F(r, \varphi) = 0$, то в задаче вычисления площади, ограниченной кривой, кривую обычно параметризуют.

Пример 187. Астроида задаётся неявно уравнением

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1,$$

в то время как её параметрические уравнения: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, где $t \in [0, 2\pi)$.
□

Замечание. Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, всегда можно найти параметрические уравнения этой кривой. Для этого достаточно воспользоваться формулами (φ выступает в роли параметра):

$$x = r(\varphi) \cdot \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \cdot \sin \varphi, \quad \text{где } \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1].$$

Если же кривая задана явным уравнением $\varphi = \varphi(r)$, то можно параметризовать кривую формулами (r – параметр):

$$x = r \cdot \cos(\varphi(r)), \quad y = r \cdot \sin(\varphi(r)), \quad \text{где } r \in [r_0, r_1].$$

Возможны и другие способы параметризации.

Пример 188. Найти площадь, ограниченную петлёй кривой

$$r^2 + \varphi^2 = 1.$$

Решение. Параметризуем кривую: $r = \cos t$, $\varphi = \sin t$. Найдём пределы интегрирования: $r^2 = 1 - \varphi^2 \Rightarrow 1 - \varphi^2 \geq 0$, откуда $\varphi \in [-1, 1]$, но тогда $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Тогда, переходя в (6) к переменной интегрирования t , имеем интеграл

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{T_0}^T r^2(t) \varphi'(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot (\sin t)' dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \frac{1}{2} \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}. \quad \square \end{aligned}$$

13.4 Задачи для самостоятельного решения

Ответ на задачу Илона Маска.

У этой задачи есть два правильных ответа. Первый — на Северном полюсе. Если вы пройдёте одну милю на юг, на запад и на север, то вы образуете треугольник и вернётесь на Северный полюс. Этот ответ дают большинство инженеров.

Однако, когда соискатель называет это место, Маск задает дополнительный вопрос и спрашивает, в каком ещё месте такое возможно. Вторым верным ответом гласит — вблизи Южного полюса, на одну милю севернее параллели, длина которой равна одной миле. Так, если человек пройдёт милю на юг, он окажется на этой параллели. После этого человек поворачивает на запад и обходит параллель по кругу. При повороте на север человек возвращается в ту же точку.

Второй ответ на задачу кажется очень сложным, и не все могли дать правильное решение. Однако Маск не придавал большого значения ответу. Предпринимателя больше интересовало то, как будет мыслить человек для решения сложной задачи.

Задачи, решаемые в декартовой системе координат:

№554. Привести примеры неквадрируемых (не имеющих площади) плоских фигур.

№555. Проводя аналогию с формулами (3) и (4), изобразить на координатной плоскости фигуры, площади которых вычисляются интегралами:

$$\text{а) } \int_0^1 \left(\frac{\pi x}{2} - \arcsin x \right) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin y - \frac{2y}{\pi} \right) dy.$$

Какой из этих интегралов больше?

№556. [8, № 2399] Найти площадь фигуры, ограниченной в прямоугольной системе координат кривыми

$$y = 2x - x^2, \quad x + y = 0.$$

№557. Вычислить площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sin x + 2, \quad y = 1, \quad x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

№558. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x - 1 \quad \text{и} \quad y^2 = x + 1.$$

№559. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{2}{x}, \quad y = x + 1 \quad \text{и} \quad x = 2.$$

Какими способами можно решить задачу?

№560. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox , прямой $x = 3$ и графиком функции $y = x^2 - 2x$.

№561. Вычислить площадь петли кривой $y^2 = x(x - 1)^2$.

№562. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y = |x - 1|, \quad y = 3 - |x|.$$

№563. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x + 1, \quad y = x - 1, \quad y = 1 - x, \quad y = 7 - x.$$

№564. [8, № 2403] Найти площадь, ограниченную *эллипсом*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(полуоси $a, b > 0$) используя: 1) его параметрические уравнения; 2) явное представление.

№565. [8, № 2397] Найти площадь фигуры, ограниченной в прямоугольных координатах *параболами*:

$$ax = y^2, \quad ay = x^2 \quad (a > 0).$$

№566. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 3 + \sqrt{x}, \quad y = 3 - \sqrt{x}, \quad y = x + 1.$$

№567. Найти площадь фигуры, ограниченной параблами

$$x = 4 - y^2, \quad x = y^2 - 2y.$$

№568. [8, № 2413] Найти площадь фигуры, ограниченной *циклоидой*

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad \text{где } t \in [0, 2\pi],$$

и осью Ox (площадь одной арки).

№569. Вычислить площадь фигуры, ограниченной сверху первой аркой циклоиды

$$x = 5(t - \sin t), \quad y = 5(1 - \cos t), \quad \text{где } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

и снизу – прямой $y \equiv 5$.

№570. [8, № 2429] Найти площадь фигуры, ограниченной *астроидой*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

№571. [8, № 2414] Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3. \end{cases}$$

№572. Найти площадь фигуры, ограниченной петлёй кривой

$$\begin{cases} x = a(t^2 - 2t), \\ y = a(t^2 - 1)(t - 3), \quad a > 0. \end{cases}$$

№573. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} x = \frac{at^2}{1+t^4}, \\ y = \frac{at^3}{1+t^4}, \quad a > 0. \end{cases}$$

№574. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$x = a \sin t, \quad y = b \sin 2t.$$

№575. [8, № 2402] Найти площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и *локоном*

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

№576. [8, № 2410] Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y = e^{-x} |\sin x| \quad \text{и} \quad y \equiv 0 \quad (x \geq 0).$$

№577. Найти площадь фигуры в зависимости от параметра t , если фигура ограничена кривыми $y = |\sin |x| - 1|$, $x = t$ ($t \geq 0$), $y = -x - \frac{\pi}{2}$, $y \equiv 0$. Сделать рисунок.

№578. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad \text{где } a > 0.$$

Указание: перейти в полярную систему координат.

Задачи, решаемые в полярной системе координат:

№579. [8, № 2418] Найти площадь фигуры, ограниченной *лемнискато́й Бернулли*

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi \quad (a > 0).$$

№580. Найти площадь одного витка *архимедовой спирали* $r = a\varphi$.

№581. [8, № 2420] 1) Написать в полярных координатах параметрические уравнения *трилистника*

$$r = a \sin 3\varphi \quad (a > 0).$$

2) Найти площадь одного «лепестка».

№582. Найти площадь фигуры, ограниченной *четырёхлепестковой розой*

$$r = 3 \cos 2\varphi.$$

№583. [8, № 2426] Перейдя к полярным координатам, найти площадь фигуры, ограниченной *листом Декарта*

$$x^3 + y^3 = 3axy \quad (a > 0).$$

№584. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$r = 1 + 2 \sin 2\varphi.$$

№585. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$r = \sqrt{3} + 2 \cos 2\varphi.$$

№586. [8, № 2424] Найти площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой

$$\varphi = r \cdot \operatorname{arctg} r \quad \text{и двумя лучами} \quad \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

№587. [8, № 2425(a)] Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$r^2 + \varphi^2 = 1.$$

Решить задачу, не параметризуя кривой (рассматривая её как явно заданную).

№588. Студент решил вычислить площадь *улитки Паскаля*

$$r = a + b \cos \varphi \quad (0 < a < b).$$

Он воспользовался известной формулой и нашёл:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a + b \cos \varphi)^2 d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} b^2 + a^2 \right) \varphi + \frac{1}{4} b^2 \sin 2\varphi + 2ab \sin \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2} (b^2 + 2a^2). \end{aligned}$$

Какую площадь он вычислил: с петлёй, без петли, с удвоенной площадью петли?

№589. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$r = 2 \sin(4\varphi).$$

№590. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$r = 2 \sin \varphi, \quad r = -2 \sin 3\varphi.$$

№591. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$r = 1 + \cos \varphi, \quad r = \cos \varphi.$$

№592. Найти площадь фигуры, лежащей вне круга $r = a$ и ограниченной кривой ($a > 0$)

$$r = 2a \cos 3\varphi.$$

13.5 Ответы и решения

554. Рассмотрим множество F всех точек с рациональными координатами, принадлежащих квадрату $[0, 1] \times [0, 1]$. Оно представляет собой счётное объединение квадратируемых фигур (точка, очевидно, является квадратируемой фигурой нулевой площади). Верхняя площадь данной фигуры $\overline{S}(F) = 1$, поскольку наименьшим многоугольником, содержащим множество F , является сам квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$; нижняя же площадь $\underline{S}(F) = 0$, поскольку в множество F нельзя вписать никакую многоугольную фигуру ненулевой площади. Это означает, что фигура F не является квадратируемой.

555. Это одна и та же фигура, расположенная в первой четверти и заключённая между графиком арксинуса x и прямой $y = \frac{\pi x}{2}$. Интегралы равны.

556. Для определения пределов интегрирования найдём абсциссы точек пересечения графиков: $2x - x^2 = -x$, откуда $x = 0$, $x = 3$. Учитывая, какой из графиков ограничивает фигуру сверху, а какой – снизу, получаем

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.)}$$

557. Сделайте чертёж. Имеем

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} ((\sin x + 2) - 1)dx = (-\cos x + x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 2\pi \text{ (кв. ед.)}$$

558. Данная фигура (Рис. 116) может быть описана на плоскости двумя способами:

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 3, y_1(x) \leq y \leq \sqrt{x+1}\}$$

где $y_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+1}, & \text{если } -1 \leq x < 0; \\ x-1, & \text{если } 0 < x \leq 3 \end{cases}$ (стандартно относительно оси Ox)
или

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 2, y^2 - 1 \leq x \leq y + 1\}$$

(стандартно относительно оси Oy).

Эти способы порождают, соответственно, два способа решения задачи.

1-й способ (по формуле (3)):

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 (\sqrt{x+1} - y_1(x))dx = \int_{-1}^0 2\sqrt{x+1}dx + \int_0^3 (\sqrt{x+1} - x + 1)dx = \\ &= \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^0 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 - \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$



Рис. 116: Фигура, ограниченная кривыми $x = -2y - y^2$ и $x = y$.

2-й способ (по формуле (4)):

$$S = \int_{-1}^2 (y + 1 - y^2 + 1) dy = \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.)}.$$

559. Сделайте чертёж. Задачу можно решить двумя способами.

1-й способ (по формуле (3)). Для вычисления площади выпишем интеграл

$$S = \int_1^2 \left((x+1) - \frac{2}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x - 2 \ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} - 2 \ln 2.$$

2-й способ (по формуле (4)). Чтобы найти площадь фигуры, её придётся разбить на две части:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{y} \right) dy + \int_2^3 (2 - (y-1)) dy = \\ &= (2y - 2 \ln y) \Big|_1^2 + \left(3y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_2^3 = \frac{5}{2} - 2 \ln 2 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

560. Если сделать рисунок, то видно, что данные кривые ограничивают две фигуры, лежащие по разные стороны от оси абсцисс, поэтому

$$S = S_1 + S_2 = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \dots = \frac{8}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

561. Область определения этой неявной функции есть полуинтервал $x \in [0, +\infty)$. Так как в уравнение кривой переменная y входит во второй степени, то кривая симметрична относительно оси Ox , и общие точки симметричных ветвей должны лежать на оси абсцисс. Таким образом, петля образована кривыми $y = x(1-x)$ и $y = -x(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$ (Рис. 117). Поэтому площадь

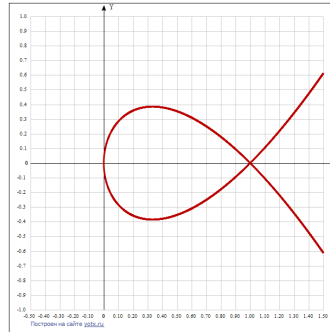
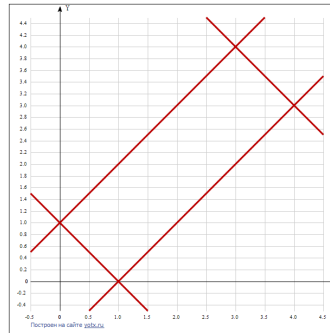
Рис. 117: Кривая $y^2 = x(x-1)^2$.

Рис. 118:

петли равна

$$S = 2 \int_0^1 \sqrt{x}(1-x)dx = 2 \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})dx = \frac{8}{15} \text{ (кв. ед.)}.$$

562. Сделайте чертёж. Найдём абсциссы точек пересечения кривых: $3 - |x| = |x - 1|$, откуда $x = -1$ или $x = 2$. Тогда искомую площадь найдём как сумму площадей трёх составляющих фигуру частей:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 ((3+x) - (1-x))dx + \int_0^1 ((3-x) - (1-x))dx + \int_1^2 ((3-x) - (x-1))dx = \\ &= 1 + 2 + 1 = 4 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

563. 1-й способ (по формуле (3)). Данная фигура – прямоугольник (Рис. 118). Для вычисления его площади можно воспользоваться (3), предварительно разбив прямоугольник на 3 части:

$$S = \int_0^1 ((x+1) - (1-x))dx + \int_1^3 ((x+1) - (x-1))dx + \\ + \int_3^4 ((7-x) - (x-1))dx = 6 \text{ (кв. ед.)}.$$

2-й способ (метод поворота). По условию, фигура ограничена кривыми $y-x = -1$, $y-x = 1$, $y+x = 1$, $y+x = 7$. Можно повернуть систему координат Oxy против часовой стрелки на 45° градусов, перейдя к системе Ouv , в которой стороны прямоугольника параллельны координатным осям:

$$\begin{cases} u = x \cos 45^\circ - y \sin 45^\circ, \\ v = x \sin 45^\circ + y \cos 45^\circ, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}], \\ v = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}]. \end{cases}$$

Тогда $S = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \cdot \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = 6 \text{ (кв. ед.)}$.

3-й способ (геометрический). Найдя координаты точек попарного пересечения прямых, определяем координаты вершин прямоугольника $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(4, 3)$, $D(3, 4)$. Тогда его площадь равна $S = |AB| \cdot |BC| = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6 \text{ (кв. ед.)}$.

4-й способ (через векторное произведение). Известна формула вычисления площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$, как модуля их векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Положим $\vec{a} = \overrightarrow{BA} = \{-1, 1, 0\}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \{3, 3, 0\}$, тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6\vec{k} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 6 \text{ (кв. ед.)}.$$

5-й способ (через двойной интеграл). Ещё один способ будет изучен позже в теме двойных (кратных) интегралов, когда делая замену переменных в двойном интеграле, численно равном площади фигуры, задачу сводят к вычислению площади прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям.

564. В силу симметрии эллипса относительно обеих координатных осей, достаточно найти четвертую часть площади.

1) Воспользуемся формулой $S = -\int_{T_0}^T y(t)x'(t)dt$:

$$\frac{S}{4} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t (-a \sin t) dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{\pi ab}{4}.$$

2) Выразим в явном виде $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \left| \frac{x}{a} = \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right| = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi ab}{4} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

565. Сделайте рисунок. Найдём абсциссы точек пересечения парабол: $x = 0$, $x = a$. Тогда

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{ax^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^3}{3a} \right) \Big|_0^a = \frac{a^2}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

566. Выполним чертёж (Рис. 119). Найдём точки пересечения кривых: (1, 2) и (4, 5). Возможны два способа решения.

1-й способ (по формуле (3)). В этом случае площадь фигуры находится как сумма площадей двух частей данной фигуры, в результате получаем сумму двух интегралов:

$$S = \int_0^1 ((3 + \sqrt{x}) - (3 - \sqrt{x})) dx + \int_1^4 ((3 + \sqrt{x} - (x + 1))) dx.$$

Но лучше решать задачу иначе.

2-й способ. Найдём обратные функции ($y = 3 \pm \sqrt{x} \Rightarrow x = (y - 3)^2$, $y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$) и воспользуемся формулой (4):

$$S = \int_2^5 ((y - 1) - (y - 3)^2) dy = \dots = 4,5 \text{ (кв. ед.)}$$

567. Найдём ординаты точек пересечения данных линий: $y = -1$, $y = 2$. Постройте кривые. Тогда для площади получаем

$$S = \int_{-1}^2 (x_2(y) - x_1(y)) dy = \int_{-1}^2 ((4 - y^2) - (y^2 - 2y)) dy = \int_{-1}^2 (4 - 2y^2 + 2y) dy = 9.$$

568. Построим циклоиду (Рис. 120). Имеем:

$$S = - \int_{2\pi}^0 y(t) x'(t) dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt =$$

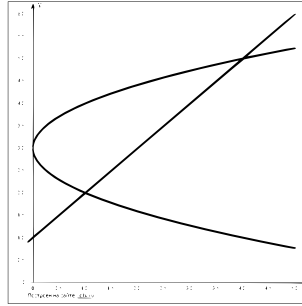
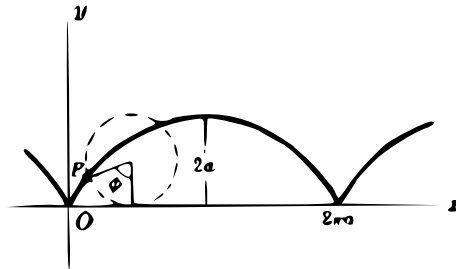
Рис. 119: Кривые $y = 3 + \sqrt{x}$, $y = 3 - \sqrt{x}$, $y = x + 1$ 

Рис. 120: Циклоида.

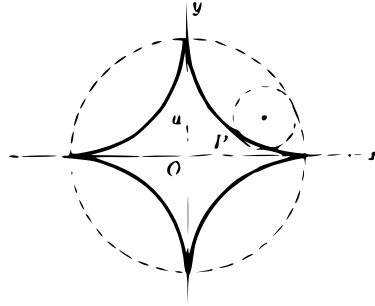
$$\begin{aligned}
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = 3\pi a^2 \text{ (кв. ед.)},
 \end{aligned}$$

так как последние два интеграла равны нулю. Итак, искомая площадь оказалась равна утроенной площади образующего циклоиду круга.

569. Найдём точки пересечения кривых (пределы интегрирования): $5(1 - \cos t) = 5$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) $\Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \frac{3\pi}{2}$. Тогда искомая площадь численно равна интегралу

$$\begin{aligned}
 S &= - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (y(t) - 5)x'(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (5(1 - \cos t) - 5)5(1 - \cos t) dt = \\
 &= -25 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t (1 - \cos t) dt = 25 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} - \cos t \right) dt = \dots = \frac{25}{2}(\pi + 4).
 \end{aligned}$$

570. Изобразим астроиду (Рис. 121). Параметрические уравнения: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). В силу симметрии кривой относительно координатных осей, достаточно вычислить четвёртую

Рис. 121: Астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

часть искомой площади. Для этого воспользуемся симметричной формулой $S = \frac{1}{2} \int_{T_0}^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt$:

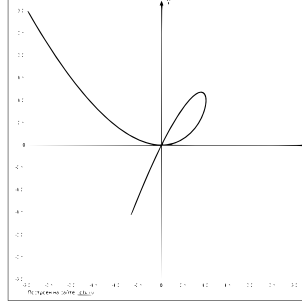
$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t - a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3a^2 \sin^2 t \cos^4 t + 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t) dt = \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \\ &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{3a^2}{16} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^2}{32} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

Симметричная формула привела здесь к более простому интегралу, чем тот, который получился бы в результате применения формул (1.a) и (2.a).

571. Изобразим кривую (Рис. 122). Заметим, что $x = 0$ при $t = 0$ и $t = 2$, но и $y = 0$ при тех же t . Это означает, что кривая сама себя пересекает, делая в начале координат петлю. Для вычисления площади этой петли воспользуемся симметричной формулой

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{T_0}^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 ((2t - t^2)(4t - 3t^2) - (2t^2 - t^3)(2 - 2t))dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2)dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{4t^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{15} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

572. Петля кривой проходит в положительном направлении при изменении t от (-1) до 3 (Рис. 123). Для вычисления площади можно применить

Рис. 122: Кривая $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

любую из трёх формул:

$$S = - \int_{T_0}^T y(t)x'(t)dt = - \int_{-1}^3 a^2(t^2 - 1)(t - 3)(2t - 2)dt =$$

$$= -2a^2 \int_{-1}^3 (t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t - 3)dt = -2a^2 \left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 3t \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{256}{15}a^2,$$

или

$$S = \int_{T_0}^T x(t)y'(t)dt = \int_{-1}^3 a^2(t^2 - 2t)(3t^2 - 6t - 1)dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{5}t^5 - 3t^4 + \frac{11}{3}t^3 + t^2 \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{256}{15}a^2 \text{ (кв. ед.)},$$

или

$$S = \frac{1}{2} \int_{T_0}^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 a^2(t^4 - 4t^3 + 7t^2 - 6t + 6)dt =$$

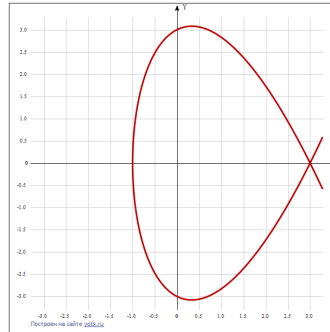
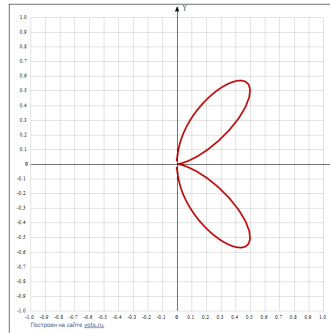
$$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{5}t^5 - t^4 + \frac{7}{3}t^3 - 3t^2 + 6t \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{256}{15}a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

573. Кривая образует две симметричные петли (Рис. 124). Верхняя из них проходится в положительном направлении при изменении t от 0 до $+\infty$. Поэтому при вычислении площади получим несобственный интеграл. В данном случае для вычисления удобно применить симметричную формулу

$$S = \frac{1}{2} \int_{T_0}^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt.$$

Поскольку $y = tx$, получаем $xy' - yx' = x(x + tx') - tx \cdot x' = x^2$, поэтому

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{a^2 t^4}{(1 + t^4)^2} dt = \frac{a^2}{8} \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{4t^3 dt}{(1 + t^4)^2} = -\frac{a^2}{8} \int_0^{+\infty} t \cdot d \left(\frac{1}{1 + t^4} \right) =$$

Рис. 123: Кривая $x = a(t^2 - 2t)$, $y = a(t^2 - 1)(t - 3)$.Рис. 124: Кривая $x = \frac{at^2}{1+t^4}$, $y = \frac{at^3}{1+t^4}$.

$$= -\frac{a^2 t}{8(1+t^4)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{a^2}{8} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi a^2}{16\sqrt{2}} \text{ (кв. ед.)}.$$

Следовательно, площадь всей фигуры равна $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$ (кв. ед.).

574. Для построения кривой учтём, что она симметрична относительно обеих осей координат. Действительно, если заменить t на $\pi - t$, то переменная x не меняется, а y изменяет только свой знак; следовательно, кривая симметрична относительно оси Ox . При замене же t на $\pi + t$ переменная y не меняется, а x изменяет знак. Это значит, что кривая симметрична относительно оси Oy . Далее, так как функции $x = a \sin t$, $y = b \sin 2t$ имеют общий период 2π , то достаточно ограничиться изменением параметра: $0 \leq t \leq 2\pi$. Из уравнения кривой легко заключить, что правая петля соответствует изменению параметра от нуля до π , поэтому достаточно вычислить её площадь и удвоить результат. Имеем (Рис. 125):

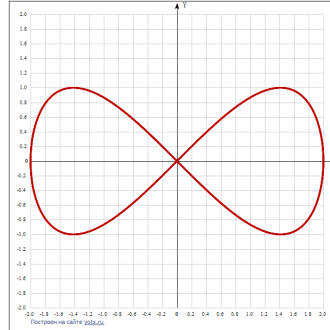
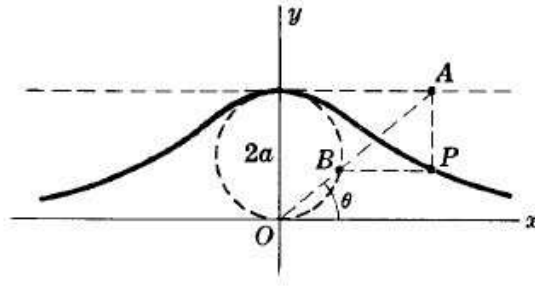
Рис. 125: Кривая $x = a \sin t$, $y = b \sin 2t$.

Рис. 126: Локон Аньёзи.

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^\pi y(t) x'(t) dt = 2 \int_0^\pi (b \sin 2t) \cdot a \cos t dt = \\
 &= 4ab \int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt = \frac{8}{3} ab \text{ (кв. ед.)}.
 \end{aligned}$$

575. Изобразим *локон* (Рис. 126). Заметим, что функция чётна и $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Фигура не квадратуема в обычном понимании, так как не ограничена. В силу симметрии имеем сходящийся несобственный интеграл

$$\begin{aligned}
 S &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A y(x) dx = 2a^3 \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{a^2 + x^2} = \\
 &= 2a^3 \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_0^A = 2a^2 \lim_{A \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{A}{a} = \pi a^2 \text{ (кв. ед.)}.
 \end{aligned}$$

576. Разобьём область интегрирования на промежутки (для однозначного раскрытия модуля):

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} e^{-x} |\sin x| dx =$$

(в каждом из интегралов сделаем замену $t = x - \pi k$):

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\pi k} \int_0^{\pi} e^{-t} |\sin t| dt = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\pi k} \frac{e^{-t}(\sin t + \cos t)}{2} \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\pi k} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{\pi}}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}})} = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

577. Построим фигуру. Фигура расположена в полуплоскости $x \geq -\frac{\pi}{2}$ (выше прямой $y = -x - \frac{\pi}{2}$), ограничена снизу прямой $y \equiv 0$, сверху графиком функции $y = 1 - \sin |x|$, справа – прямой $x = t$. Для вычисления искомой площади разобьём фигуру на две части, отвечающие $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ и $x \geq 0$, тогда её площадь равна сумме

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \sin(-x)) dx + \int_0^t (1 - \sin x) dx = (x - \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + (x + \cos x) \Big|_0^t = \\ &= (0 - \cos 0) - \left(-\frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}\right) + (t + \cos t) - (0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 2 + t + \cos t. \end{aligned}$$

578. Это неявное уравнение задаёт лемнискату Бернулли. Получите её полярное уравнение и решите задачу в полярной системе координат (см. следующую задачу).

579. Изобразим лемнискату (Рис. 127). Область определения задаётся неравенством $\cos 2\varphi \geq 0$ (отсюда следует, что в первой четверти кривая определена при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$). В силу симметрии кривой относительно координатных осей, достаточно найти площадь четвёртой части фигуры, лежащей в 1-й четверти:

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4} \text{ (кв. ед.)}$$

580. Сделайте чертёж. По соответствующей формуле находим площадь витка спирали

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{6} \cdot \varphi^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 \text{ (кв. ед.)}$$

581. 1) Воспользовавшись формулами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получим: $x = a \sin 3\varphi \cos \varphi = x(\varphi)$, $y = a \sin 3\varphi \sin \varphi = y(\varphi)$.

2) Изобразим трилистник (Рис. 128). Для нахождения пределов интегрирования достаточно учесть период и область определения, задаваемую неравенством $a \sin 3\varphi \geq 0$. На участке $0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$, длина которого равна периоду,

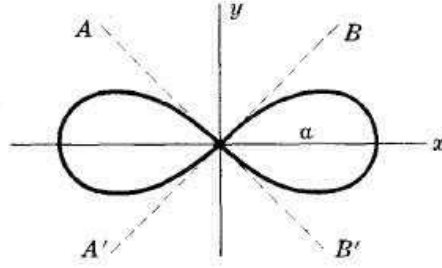
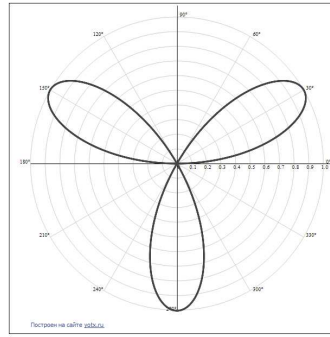


Рис. 127: Лемниската Бернулли.

Рис. 128: Трилистник $r = a \sin 3\varphi$.

кривая определена лишь при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$. Теперь можно найти площадь соответствующего «лепестка»:

$$\begin{aligned} \frac{S}{3} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (a \sin 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\varphi - \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi a^2}{12} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

582. Сделайте рисунок. Имеем

$$\frac{S}{8} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \dots = \frac{9}{16} \pi.$$

Тогда $S = \frac{9}{2} \pi$ (кв. ед.)

583. Запишем уравнение *декартова листа* (Рис. 129) в полярных координатах. Так как $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то, подставляя в уравнение, получим

$$(r \cos \varphi)^3 + (r \sin \varphi)^3 = 3ar \cos \varphi \cdot r \sin \varphi,$$

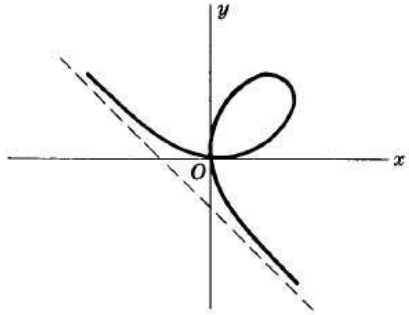


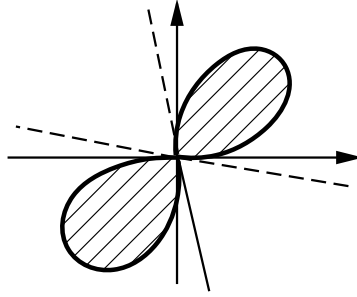
Рис. 129: Декартов лист.

откуда находим $r = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$. Заметим, что при φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ кривая делает петлю, ограничивающую искомую площадь. Это даёт нам пределы интегрирования:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \right)^2 d\varphi = \\ &= \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi \cdot d(\operatorname{tg} \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} = \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\operatorname{tg}^3 \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} = \frac{3a^2}{2} \left(-\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^3 \varphi} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

584. Найдём допустимые значения φ : $1 + 2 \sin 2\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \sin 2\varphi \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{12} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Период функции равен π , поэтому достаточно построить кривую на промежутке $-\frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{12}$. Найдём производную: $r'(\varphi) = 4 \cos 2\varphi \geq 0$ при $-\frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, т. е. кривая выходит из начала координат, r возрастает, достигает максимума в точке $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и затем убывает до нуля при $\varphi = \frac{7\pi}{12}$, образуя «лепесток» (Рис. 130). В силу периодичности кривой с периодом π , Таких лепестков одинаковой площади будет два. Поэтому

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}} r^2(\varphi) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}} (1 + 2 \sin 2\varphi)^2 d\varphi = \\ &= \left(\varphi + 4 \left(-\frac{\cos 2\varphi}{2} \right) \right) \Big|_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}} + 4 \int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Рис. 130: Кривая $r = 1 + 2 \sin 2\varphi$.

585. Ответ: $\frac{25\pi}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (кв. ед.). См. решение предыдущей задачи.

586. Воспользуемся формулой (7): $S = \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_1} r^2 \varphi'(r) dr$. Нам понадобятся пределы интегрирования r_0 и r_1 , найдём их. Заметим, что значению $\varphi = 0$ соответствует $r = 0$, значению $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ отвечает $r = \sqrt{3}$, причём $\varphi'(r) = \arctg r + \frac{r}{1+r^2}$. Тогда для площади имеем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \cdot \varphi'(r) dr = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \left(\arctg r + \frac{r}{1+r^2} \right) dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \arctg r dr + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \frac{r}{1+r^2} dr = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{r^3}{3} \arctg r + \frac{r^2}{3} - \frac{1}{3} \ln(1+r^2) \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{2}{3} \ln 2 \right). \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

587. Чтобы найти пределы интегрирования, выпишем ограничения на φ : так как $r^2 = 1 - \varphi^2 \geq 0$, то $-1 \leq \varphi \leq 1$, поэтому

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - \varphi^2) d\varphi = \int_0^1 (1 - \varphi^2) d\varphi = \\ &= \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

588. Подумайте самостоятельно. На Рис. 131 изображена улитка Паскаля $r = a + b \cos \varphi$ при $a = 1$, $b = 2$.

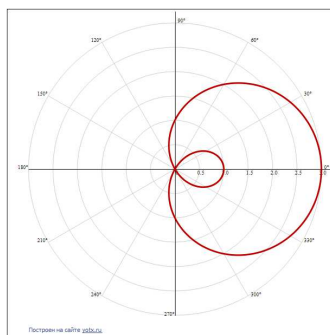


Рис. 131: Улитка Паскаля $r = a + b \cos \varphi$ ($0 < a < b$).

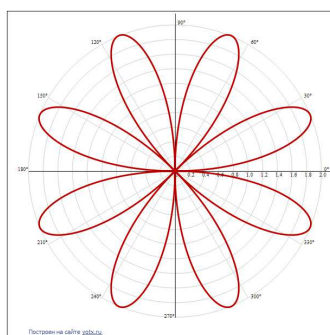
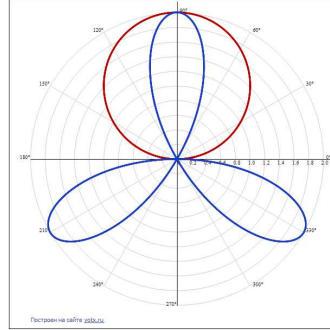


Рис. 132: Кривая $r = 2 \sin(4\varphi)$.

Рис. 133: Кривые $r = -2 \sin 3\varphi$, $r = 2 \sin \varphi$.

589. Построим кривую (Рис. 132). Найдём границы одного из восьми «лепестков» (пределы интегрирования): $2 \sin(4\varphi) \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in [\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}]$, $n \in \mathbb{Z}$. При $n = 0$ имеем $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$, тогда для площади этого «лепестка» получаем

$$\begin{aligned} \frac{S}{8} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \sin^2(4\varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos(8\varphi)) d\varphi = \\ &= \left(\varphi - \frac{\sin(8\varphi)}{8} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow S = 2\pi \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

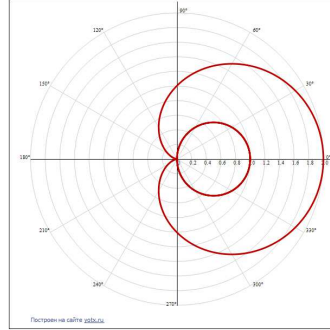
590. Искомая площадь S равна разности площади круга $r = 2 \sin \varphi$ ($S_1 = \pi$) и площади лепестка трилистника (S_2) (Рис. 133). Найдём площадь лепестка:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (-2 \sin 3\varphi)^2 d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi = \left(\varphi - \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Тогда окончательно $S = S_1 - S_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ (кв. ед.).

591. Половине искомой площади соответствует изменение угла φ от 0 до π (Рис. 134). Но внутренняя кривая меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому будем вычислять искомую площадь как сумму двух площадей, где $r_2(\varphi) = 1 + \cos \varphi$, $r_1(\varphi) = \cos \varphi$:

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r_2^2(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((1 + \cos \varphi)^2 - \cos^2 \varphi) d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \end{aligned}$$

Рис. 134: Кривые $r = 1 + \cos \varphi$, $r = \cos \varphi$.

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos \varphi) d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \dots = \frac{5}{8} \pi \text{ (кв. ед.)}$$

592. Так как функция $r = 2a \cos 3\varphi$ имеет период $T = \frac{2\pi}{3}$, то при изменении φ от $-\pi$ до π радиус-вектор описывает три лепестка кривой. При этом допустимыми для φ являются те значения, при которых $\cos 3\varphi \geq 0$, откуда $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, один из лепестков описывается при изменении φ от $-\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{6}$. Искомая площадь равна утроенной площади той части одного лепестка, что лежит вне круга.

Найдём полярные координаты точек пересечения лепестка с кругом: $2a \cos 3\varphi = a$, откуда $\cos 3\varphi = \frac{1}{2}$. Между $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$ находятся только корни $-\frac{\pi}{9}$ и $\frac{\pi}{9}$. Таким образом,

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} (r^2(\varphi) - a^2) d\varphi = \frac{3}{2} \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} ((2a \cos 3\varphi)^2 - a^2) d\varphi = a^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ (кв. ед.)}.$$

14 СЕМИНАР: Вычисление длины дуги кривой

«Подобно тому как все искусства тяготеют к музыке,
все науки стремятся к математике».

Д. Сантаяна (1863–1952) – американский философ и
писатель испанского происхождения.

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Практическое значение имеет задача вычисления длины траектории материальной точки, движущейся вдоль некоторой кривой. Рассмотрим основные понятия.

Плоская и пространственная кривые. *Плоской (непрерывной) кривой* L назовём множество всех точек M плоскости, координаты которых в прямоугольной системе координат Oxy определяются уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in \{t\},$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны в каждой точке своей области задания $\{t\}$. В качестве множества $\{t\}$ значений параметра t наряду с сегментами могут выступать конечные и бесконечные интервалы и полуинтервалы (т. е. множества, которые принято называть промежутками).¹ *Дугой кривой* назовём образ сегмента $[T_0, T]$ при непрерывном однозначном отображении $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [T_0, T]$.

Аналогично, *пространственной кривой* назовём множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, координаты которых (x, y, z) определяются уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \text{где } t \in \{t\},$$

с непрерывными на множестве $\{t\}$ функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Простая кривая. Назовём плоскую (или пространственную) кривую *простой*, если различным значениям параметра $t \in \{t\}$ отвечают разные точки кривой, т. е. если кривая не имеет точек самопересечения.

Замкнутая кривая. Различают замкнутые и незамкнутые кривые. Определим простую замкнутую кривую. Пусть L_1 и L_2 – две простые кривые, причём граничные точки кривой L_1 совпадают с граничными точками кривой L_2 , а любые неграничные точки кривых L_1 и L_2 различны. Кривая L , полученная объединением кривых L_1 и L_2 называется простой *замкнутой* кривой.

¹Для определённости в дальнейшем, если не оговорено противное, под $\{t\}$ будем понимать сегмент $[T_0, T]$.

Параметризуемая кривая. В математическом анализе часто приходится рассматривать кривые, не являющиеся простыми, например кривые, имеющие точки самопересечения или целые участки самоналегания. В связи с этим возникает необходимость ввести в рассмотрение понятие так называемой параметризуемой кривой.

Вводя ранее понятие определённого интеграла Римана, мы осуществляли разбиение отрезка $[a, b]$. Обобщим это понятие с отрезка на кривую. Пусть множество $\{t\}$ – заданный промежуток, а функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ непрерывны на этом множестве. Скажем, что конечная или бесконечная система сегментов $\{[t_{k-1}, t_k]\}$ *разбивает* множество $\{t\}$, если, во-первых, объединение всех этих сегментов представляет собой всё множество $\{t\}$ и, во-вторых, общими точками любых двух сегментов системы могут быть лишь их концы.

Пример 189. Система сегментов $[0, \frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$, очевидно, разбивает $[0, 1]$. Система сегментов $[n-1, n]$, где $n = 1, 2, \dots$, разбивает полупрямую $[0, +\infty)$. $\square$

Будем говорить, что уравнения $x = x(t)$ и $y = y(t)$ задают на плоскости *параметризуемую кривую* L , если существует такая система сегментов $\{[t_{k-1}, t_k]\}$, разбивающих множество $\{t\}$, что для значений t из каждого сегмента этой системы уравнения определяют простую кривую.

В параметризуемых кривых, в отличие от произвольных непрерывных кривых, точки, отвечающие различным значениям параметра, принято считать различными. Таким образом, между значениями параметра t и точками на кривой установлено взаимно однозначное соответствие. Параметризуемую кривую можно рассматривать как объединение простых кривых, причём эти простые кривые проходятся последовательно, когда параметр t , монотонно возрастая, пробегает всё множество $\{t\}$.

Между точками кривой L можно ввести некоторое отношение порядка. Пусть точка M_1 соответствует значению параметра t_1 , а точка M_2 значению t_2 . Мы скажем, что точка M_1 *предшествует* точке M_2 (обозначение $M_1 \prec M_2$), если $t_1 < t_2$.

Замечание 1. Простую кривую можно рассматривать как частный случай параметризуемой кривой. В этом случае система сегментов, разбивающих сегмент $[t_0, t_1]$, состоит из одного сегмента, а именно, из самого сегмента $[t_0, t_1]$.

Замечание 2. Про параметризуемую кривую, определяемую уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где $t \in \{t\}$, говорят, что эта кривая *параметризована* при помощи этих уравнений.

Замечание 3. Одна и та же кривая может быть параметризована различными способами (т. е. параметризация не единственна). В самом деле, из любой параметризации можно получить другие, получающиеся из неё путём представления параметра t в виде непрерывных, строго возрастающих функций

другого параметра s . Только при таких преобразованиях параметра сохраняется порядок следования точек разбиения $M_1 \prec M_2 \prec \dots$ на кривой.

Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 190. Верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) единичного радиуса с центром в начале координат может быть параметризована, например, следующими способами:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad \text{где } t \in [0, \pi], \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \end{cases} \quad \text{где } t \in [-1, 1].$$

Пример 191. Пусть плоская кривая задана системой уравнений

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \operatorname{arcctg} t, \end{cases} \quad \text{где } t \in \mathbb{R}.$$

Найти другую параметризацию, отличную от данной, и построить кривую.

Решение. Складывая параметрические уравнения, получим: $x + y = \frac{\pi}{2}$, откуда находим $y = \frac{\pi}{2} - x$, где $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Это отрезок прямой с выколотыми концами, для которого возможна следующая параметризация:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{\pi}{2} - t, \end{cases} \quad \text{где } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \quad \square$$

Рассмотрим ещё пример параметризуемой кривой.

Пример 192. Пусть плоская кривая L параметризуется уравнениями

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \text{где } t \in [0, 3\pi].$$

Очевидно, сегмент $[0, 3\pi]$ можно разбить на сегменты $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$ такие, что для значений t из каждого указанного сегмента выписанные уравнения определяют простую кривую, а именно полуокружность. В данном случае кривая L представляет собой окружность, у которой полуокружность, лежащая в верхней полуплоскости, проходится дважды. $\square$

Способы задания кривых. Рассмотрим основные способы задания кривых на плоскости (в пространстве). Начнём с декартовых координат.

а) *Параметрический способ задания кривой.* Мы уже говорили об этом ранее. Рассмотрим примеры известных как плоских, так и пространственных параметризуемых кривых.

Пример 193. Уравнения

$$x = at + b, \quad y = ct + d, \quad \text{где } -\infty < t < +\infty,$$

определяют на плоскости *прямую линию*. $\square$

Пример 194. Два параметрических уравнения

$$x = x_0 + \cos t, \quad y = y_0 + \sin t, \quad \text{где } 0 \leq t \leq 4\pi,$$

описывают параметризуемую кривую в виде *окружности* единичного радиуса с центром в точке (x_0, y_0) , которая проходится дважды. $\square$

Пример 195. Три уравнения

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad \text{где } -\infty < t < +\infty,$$

задают простую (параметризуемую) пространственную кривую, называемую *винтовой линией*. $\square$

Любую параметрически заданную кривую можно представить *векторным способом*. Так, если обозначить через $\vec{r}$ радиус-вектор $\{x(t), y(t), z(t)\}$, то кривая будет задаваться вектор-функцией $\vec{r}(t)$, где $t \in \{t\}$. В этом случае с кривыми можно выполнять векторные операции, что расширяет возможности работы с ними.

б) *Явный способ задания кривой* (как частный случай параметрического задания). Плоская кривая может быть задана явно уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, разрешённым относительно переменной y (или уравнением $x = x(y)$, $y \in [c, d]$ разрешённым относительно x).

Пример 196. Плоская кривая, заданная на сегменте $[a, b]$ явным уравнением $y = f(x)$, может быть параметризована уравнениями

$$x = t, \quad y = f(t), \quad \text{где } t \in [a, b]. \quad \square$$

в) *Неявный способ задания кривой*. На плоскости кривую можно задать с помощью уравнения с двумя переменными, не разрешённого ни относительно y , ни относительно x :

$$F(x, y) = 0.$$

В этом случае говорят о *неявном задании кривой*.

В пространстве кривую можно определять неявно как пересечение двух поверхностей

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Пример 197. Пространственная прямая может быть задана пересечением двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

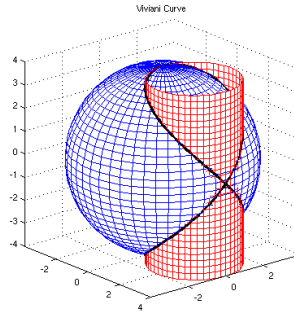


Рис. 135: Кривая Вивиани.

Пример 198. Система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax, \end{cases}$$

определяет в пространстве замкнутую кривую, называемую *кривой Вивиани* (кривая, по которой пересекаются сфера радиуса a и прямой круговой цилиндр диаметра a , одна из образующих которого проходит через центр сферы, Рис. 135). Кривую Вивиани можно представить и параметрически:

$$x = a \sin^2 t, \quad y = a \sin t \cos t, \quad z = a \cos t, \quad \text{где } t \in [0, 2\pi]. \quad \square$$

14.1 Спряmlяемая кривая и её длина. Особые точки

«Уже более 10 лет — со времён, когда я был очень небогатым студентом, — я не устаю повторять: деньги переоценены, потому что созидание намного интереснее потребления, а внутреннее состояние несоизмеримо важнее внешнего».

Павел Валерьевич Дуров (род. 1984) — российский предприниматель, программист, долларовый миллиардер. Один из создателей социальной сети «ВКонтакте» и одноимённой компании, кросс-платформенного мессенджера Telegram и других проектов.

Спряmlяемые кривые. Понятие длины дуги кривой. Введём понятие длины дуги параметризуемой кривой и рассмотрим основные свойства кривых, имеющих длину (такие кривые принято называть *спряmlяемыми*).

Рассмотрим простую (без самопересечений) незамкнутую плоскую кривую L , которая параметризуется уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$,

где $t \in [T_0, T]$. Выполним произвольное разбиение $\bar{T}$ отрезка $[T_0, T]$: $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Этому разбиению соответствует разбиение кривой L точками $M_0, M_1, \dots, M_n$, где $M_k(x(t_k), y(t_k))$, $k = \overline{0, n}$. Образовавшуюся при этом ломаную $l(\bar{T}) = M_0 M_1 \dots M_n$ будем называть ломаной, *вписанной* в кривую L и отвечающей разбиению $\bar{T}$ сегмента $[T_0, T]$.

Кривая L называется *спрямляемой* (или имеющей конечную длину)¹, если множество длин $|l(\bar{T})|$ вписанных в кривую L ломаных $l(\bar{T})$, отвечающих всевозможным разбиениям $\bar{T}$ отрезка $[T_0, T]$, ограничено. При этом точная верхняя грань множества $\{|l(\bar{T})|\}$ называется *длиной дуги* кривой L .²

$$L = \sup_{\bar{T}} |l(\bar{T})|.$$

Длина кривой — числовая характеристика протяжённости этой кривой.

Существуют непрерывные, но неспрямляемые кривые. Один из примеров такой кривой можно найти в книге В.А. Ильина и Э.Г. Позняка «Основы математического анализа–1» (М., 1982, с. 382–386). Другой пример предложен в работе А.Н. Марченко, В.П. Аносова [19]. Ниже рассмотрены ещё два известных примера.

Пример 199. *Снежинка Коха* — классический пример ограниченной, замкнутой, но неспрямляемой кривой (т. к. имеет бесконечную длину). Более того, любая сколь угодно малая её дуга также неспрямляема (Рис. 136). Она получается из кривой Коха.³

Пример 200. В 1890 году Джузеппе Пеано открыл непрерывную кривую, ныне называемую *кривой Пеано*, которая проходит через любую точку единичного квадрата, целиком заполняя его! Как и снежинка Коха, она имеет бесконечную длину. Целью Пеано было построение непрерывного отображения из единичного отрезка в единичный квадрат. Заняться проблемой Пеано побудил более ранний неожиданный результат Георга Кантора о том, что множество точек единичного интервала имеет ту же мощность, что и множество точек единичного квадрата. Задача, которую решал Пеано, заключалась в вопросе — может ли быть такое отображение непрерывным, т. е. может ли кривая заполнить пространство квадрата. Оказалось, что может.

¹Исторически вычисление длины кривой называлось *спрямлением* кривой.

²Длину кривой, как и саму кривую, будем для простоты обозначать также через L , поскольку по контексту обычно ясно, что имеется в виду: сама кривая или её длина.

³*Кривая Коха* — фрактальная кривая, описанная в 1904 году шведским математиком Хельге фон Кохом. Кривая Коха является типичным геометрическим фракталом. Процесс её построения выглядит следующим образом: берём единичный отрезок, разделяем на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырёх звеньев длины $1/3$. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырёх получившихся звеньев и т. д. Предельная кривая и есть кривая Коха.

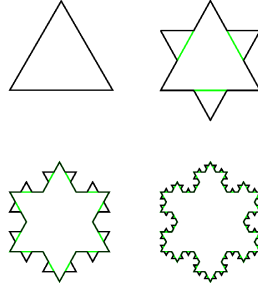


Рис. 136: Снежинка Кóха – пример фрактальной кривой.

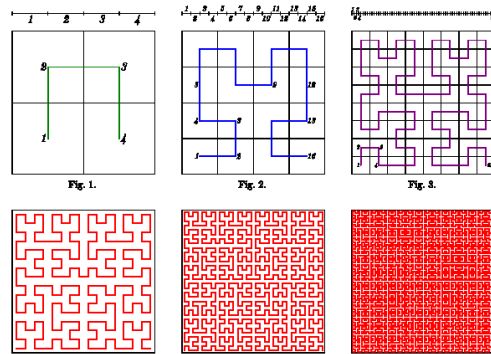


Рис. 137: Кривая Пеано – ещё один пример фрактальной кривой.

При этом решение, найденное Пеано, вовсе не устанавливало непрерывное взаимно однозначное отображение между единичным интервалом и единичным квадратом, и более того, такого отображения не существует (Рис. 137). $\square$

Понятие длины дуги пространственной кривой вводится аналогично.

Приведём три важнейших свойства спрямляемых кривых (доказательство см., например, в [11, 12] или [27, с. 46]):

1. (*Инвариантность относительно параметризации*). Если кривая спрямляема, то длина L её дуги не зависит от способа параметризации этой кривой.

2. (*Аддитивность*). Если спрямляемая кривая L разбита при помощи конечного числа точек на конечное число кривых L_k , $k = \overline{1, n}$, то каждая из этих кривых спрямляема и сумма длин всех таких кривых равна длине кривой L .

3. (Существование единицы). Существует дуга единичной длины.¹

Обыкновенные и особые точки кривой. Напомним некоторые сведения об особых точках кривых. Точки кривых подразделяются на обыкновенные (регулярные) и особые. Точка кривой называется *обыкновенной*, если в этой точке к кривой можно провести единственную касательную. В противном случае точки относят к *особым*. Иными словами, *особые точки* кривой – это точки, в окрестности которых не существует гладкой параметризации.

Если функции $x_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T]$, причём $(x'_1(t))^2 + \dots + (x'_m(t))^2 \neq 0$ ни при каком $t \in [T_0, T]$ (т. е. кривая не имеет особых точек), то кривая L называется *гладкой*. Кривая L называется *кусочно-гладкой*, если её можно разбить на конечное число гладких кривых. Если кривая непрерывная и кусочно-гладкая, то производные определяющих её функций $x_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, могут иметь на $[T_0, T]$ не более конечного числа точек разрыва 1-го рода.

Если кривая на плоскости задана *неявно* уравнением $F(x, y) = 0$,² где $F(x, y)$ – по крайней мере дважды дифференцируемая функция двух переменных, то особая точка определяется необходимыми условиями:

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = 0, \\ F'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Здесь $F'_x(x, y)$ – это производная функции $F(x, y)$ по переменной x , при условии, что y фиксировано; $F'_y(x, y)$ – производная $F(x, y)$ по y при фиксированном x .

Если кривая L задана системой параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \text{где } x(t), y(t) \in \mathbb{C}^1[T_0, T],$$

то особая точка удовлетворяет условию $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 0$.

Рассмотрим виды особых точек.

1) Точка *самопересечения* – это особая точка кривой, в которой кривая пересекает сама себя, т. е. две (или более) её ветви пересекаются под ненулевым углом. Другое название такой точки – *узловая точка*, или *узел*. Например, для лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 + y^2) = 0$$

точка $(0, 0)$ является точкой самопересечения. Для листа Декарта

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

точка начала координат также является узловой точкой. Для точки самопересечения достаточным является условие

$$\Delta = F''_{xx} \cdot F''_{yy} - (F''_{xy})^2 < 0.$$

¹Это означает, что измерение длины дуги существенным образом зависит от выбора масштабной единицы измерения в системе координат.

²Если $F(x, y)$ есть целый многочлен от x и y , то кривая называется *алгебраической*.

2) Точка *самоприкосновения* – особая точка кривой, в которой кривая касается самой себя. Например, для кривой

$$y^2 - x^4 + x^6 = 0$$

точка $(0, 0)$ является точкой самоприкосновения.

3) *Изолированная* особая точка. Например, кривая

$$x^2 + y^2 = 0$$

состоит из единственной, а значит, изолированной, особой точки.

4) Точка *возврата*, или *касп* (англ. cusp – заострение) – особая точка, в которой кривая линия разделяется на две (или более) ветви, имеющие в этой точке одинаковый направляющий вектор. То есть ветви в данной точке имеют общую касательную и движение вдоль них из данной точки изначально происходит в одном и том же направлении. Если при этом обе ветви расположены по разные стороны от касательной, то точка называется *точкой возврата 1-го рода*, а если с одной стороны, то *точкой возврата 2-го рода*. Например, полукубическая парабола $y^2 - ax^3 = 0$ ($a > 0$) имеет в начале координат точку возврата. У кардиоиды $r = 1 + \cos \varphi$ точка $(0, 0)$ является точкой возврата. Если же ветви кривой, сходящиеся в точке, имеют разные касательные (точнее, полукасательные), то точку называют *точкой излома*.

Помимо особых точек важную роль в исследовании кривых играют экстремальные точки и точки перегиба. В *точках перегиба* существует касательная к кривой, при этом кривая меняет направление выпуклости при переходе через эти точки. В *экстремальных* точках одна из переменных достигает наибольшего (наименьшего) значения среди точек окрестности.

14.2 Достаточные условия спрямляемости и вычисление длины дуги кривой в прямоугольных координатах

«Шпаргалка оскорбительна для профессора тем, что студент уместает в ней содержание всех его лекций».

Константин Семёнович Мелихан (род. 1952) – советский и российский писатель, автор юмористических книг, эстрадный исполнитель собственных произведений, карикатурист, телеведущий, президент клуба джентльменов.

Обратимся к достаточным условиям спрямляемости кривых и вычислению длин их дуг.

Пусть кривая задана в декартовых (полярных) координатах при помощи непрерывно дифференцируемых функций (является гладкой). В общем случае длина дуги кривой между точками A и B вычисляется по символической

формуле

$$L = \int_A^B dl,$$

где dl – дифференциал дуги. Обратимся к конкретным случаям.

1. Случай явного задания функции на плоскости. Пусть функция $y(x)$ определена и имеет непрерывную первую производную на сегменте $[a, b]$.¹ Тогда кривая, определяемая этим уравнением, спрямляема и её длина вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx, \quad (1)$$

Подынтегральное выражение $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ называется при этом *дифференциалом дуги* и обозначается dl . Для плоских спрямляемых кривых справедливо равенство $dl^2 = dx^2 + dy^2$.

Пример 201. Вычислить длину дуги *полукубической параболы* $y^2 = x^3$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

Решение. Найдём $y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, тогда по формуле (1) имеем

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \\ &= \frac{8}{27} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} - 1 \right) \text{ (ед.) } \square \end{aligned}$$

Длина дуги гладкой кривой, заданной явным уравнением $x = x(y)$, $y \in [c, d]$, находится по симметричной формуле

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy \quad (2)$$

с дифференциалом дуги вида $dl = \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy$.

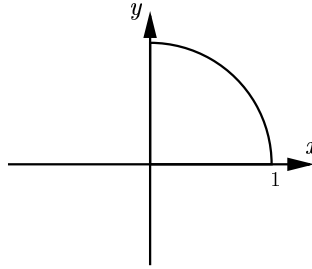
Пример 202. Вычислить длину дуги кривой

$$x = \ln(\cos y), \quad \text{где } y \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Решение. Найдём $x'(y) = -\operatorname{tg} y$, тогда по формуле (2) имеем

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y} dy =$$

¹Как было отмечено выше, такие функции называют *непрерывно дифференцируемыми* и пишут $y(x) \in C^1[a, b]$, а кривые, описываемые этими функциями, называют *гладкими*. В каждой точке гладкой кривой существует касательная.

Рис. 138: Кривая $x(t) = |\cos t|$, $y(t) = |\sin t|$.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dy}{\cos y} = \dots = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} \right) \text{ (ед.) } \square$$

2. Случай параметрического задания плоской кривой. Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные первые производные $x'(t)$ и $y'(t)$ на сегменте $[T_0, T]$. Тогда кривая L , определяемая параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, спрямляема, и длина её дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (3)$$

Здесь выражение $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ есть дифференциал дуги, который удовлетворяет дифференциальному соотношению $dl^2 = dx^2 + dy^2$; функция $l(t) = \int_{T_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ называется *переменной дугой*.

Замечание 1. Формула (3) справедлива, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны, а производные $x'(t)$ и $y'(t)$ только интегрируемы на сегменте $[T_0, T]$.

Замечание 2. Данная формула применима к кривым, не имеющим кратных точек (т. е. каждая точка получается лишь при одном значении параметра t , за исключением – если кривая замкнута – совпадающих концов кривой).

Пример 203. Найти длину кривой, заданной параметрически

$$x(t) = |\cos t|, \quad y(t) = |\sin t|.$$

Решение. Для определения пределов интегрирования построим эскиз кривой (Рис. 138). Заметим, что $x^2 + y^2 = 1$, т. е. кривая представляет собой дугу окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Кривая целиком расположена в первой четверти и вся проходит при изменении параметра от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Учитывая,

что в первой четверти $|\cos t| = \cos t$, $|\sin t| = \sin t$, приходим к интегралу

$$L = \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \frac{\pi}{2} \text{ (ед.) } \square$$

Пример 204. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad \text{где } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Решение. Найдём производные: $x'(t) = t^2 \cos t$, $y'(t) = t^2 \sin t$, тогда по формуле (3) имеем:

$$L = \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(t^2 \cos t)^2 + (t^2 \sin t)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \frac{\pi^3}{24} \text{ (ед.) } \square$$

Пример 205. Вычислить длину эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Решение. Имеем

$$L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \cdot \sin^2 t} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 t} dt,$$

где $\varepsilon = \frac{c}{a}$ — эксцентриситет эллипса. Этот интеграл является неберущимся и может быть найден лишь приближённо численными методами. Интеграл, к которому привела задача о длине эллипса, называется *эллиптическим*. Этот интеграл подробно исследован и является частным видом класса эллиптических интегралов, для вычисления которых имеются таблицы. $\square$

3. Случай параметрического задания пространственной кривой. Если параметризуемая кривая задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ имеют непрерывные первые производные $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$ на сегменте $[T_0, T]$, то длина её дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt, \quad (4)$$

где $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$ — дифференциал дуги и $dl^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$.

Пример 206. Найти длину дуги пространственной кривой

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 3t^2, \\ z = 2t^3, \end{cases} \quad \text{от точки } O(0, 0, 0) \text{ до точки } A(3, 3, 2).$$

Решение. Найдём производные: $x'(t) = 3$, $y'(t) = 6t$, $z'(t) = 6t^2$. Заметим, что точке O соответствует значение параметра $t = 0$, а точке A – значение $t = 1$. Тогда по формуле (4) имеем

$$\begin{aligned} L &= \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \\ &= \int_0^1 \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} dt = 3 \int_0^1 \sqrt{(1 + 2t^2)^2} dt = 3 \int_0^1 (1 + 2t^2) dt = 5 \text{ (ед.) } \square \end{aligned}$$

4. Случай неявного задания плоской кривой. Если плоская кривая L задана в прямоугольной системе координат *неявным* уравнением $F(x, y) = 0$, то для вычисления длины дуги либо выражают явно y через x (или x через y), или параметризуют кривую, и уже после этого вычисляют длину дуги по соответствующей формуле. Иногда в такой ситуации имеет смысл перейти к полярным координатам.

14.3 Вычисление длины дуги кривой в полярных координатах

*«Не будет большим злом, если студент впадёт в заблуждение;
если же ошибаются великие умы, мир дорого оплачивает
их ошибки».*

*Никола Тесла (1856–1943) – сербский физик,
инженер, изобретатель.*

1. Если кривая в полярной системе координат задана явным уравнением $r = r(\varphi)$, где $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$ и $r(\varphi) \in \mathbb{C}^1[\varphi_0, \varphi_1]$, то кривая спрямляема и длина её дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (5)$$

В этом случае дифференциал дуги описывается выражением

$$dl = \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Пример 207. Найти длину дуги $r = \sqrt{2}e^\varphi$, где $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. По формуле (5) имеем

$$L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sqrt{2}e^\varphi)^2 + (\sqrt{2}e^\varphi)^2} d\varphi =$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\varphi} d\varphi = 2 \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}} \right) \text{ (ед.) } \square$$

2. Если кривая задана в полярных координатах явным уравнением $\varphi = \varphi(r)$, где $r \in [r_0, r_1]$ и $\varphi(r) \in \mathbb{C}^1[r_0, r_1]$, $\varphi'(r)$ сохраняет знак, то для вычисления длины дуги кривой необходимо в интеграле (5) перейти к переменной интегрирования r :

$$L = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{r^2 + \frac{1}{(\varphi'(r))^2} \cdot \varphi'(r)} dr, \quad (6)$$

где пределы интегрирования r_0 и r_1 согласованы с φ_0 и φ_1 . Если при этом $\varphi'(r) > 0$ на $[r_0, r_1]$, то $\varphi(r_0) = \varphi_0$, $\varphi(r_1) = \varphi_1$ и, внося производную под знак корня, окончательно получаем

$$L = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{r^2(\varphi'(r))^2 + 1} dr.$$

3. Если плоская кривая задана параметрическими уравнениями $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, где $t \in [T_0, T]$ и $\varphi(t)$ монотонна, то для вычисления длины её дуги необходимо в интеграле (5) перейти к переменной интегрирования t :

$$\begin{aligned} L &= \int_{T_0}^T \sqrt{r^2(t) + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2} \cdot |\varphi'(t)| dt = \\ &= \int_{T_0}^T \sqrt{r^2(t) + \left(\frac{dr/dt}{d\varphi/dt} \right)^2} \cdot |\varphi'(t)| dt = \int_{T_0}^T \sqrt{r^2(t)(\varphi'(t))^2 + (r'(t))^2} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

14.4 Задачи для самостоятельного решения

Задачи, решаемые в декартовой системе координат:

№593. [8, № 2433] Найти длину дуги *цепной линии*

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

от точки $A(0, 1)$ до точки $B(b, y(b))$.

№594. Найти длину дуги кривой $y = \ln(1 - x^2)$, где $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

№595. [8, № 2436] Найти длину дуги *локона Анвёзи* (верзьёра)

$$y = a \cdot \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq b < a).$$

№596. Найти длину дуги параболы $y = ax^2$, где $0 \leq x \leq 1$.

№597. Найти длину кривой, заданной параметрически

$$x(t) = \cos^2 t, \quad y(t) = \sin^2 t.$$

№598. Найти длину кривой, заданной параметрически

$$x(t) = \cos^2 t, \quad y(t) = -\sin^2 t.$$

№599. [8, № 2442] Найти длину кривой, заданной параметрически

$$x(t) = \cos^4 t, \quad y(t) = \sin^4 t.$$

№600. Найти длину кривой, заданной параметрически уравнениями

$$x(t) = 2 \cos t + 1, \quad y(t) = 2 \sin t - 3.$$

№601. Найти длину кривой, заданной параметрически уравнениями

$$x(t) = \operatorname{ch}^3 t, \quad y(t) = \operatorname{sh}^3 t, \quad \text{где } t \in [0, T].$$

№602. Найти длину кривой, заданной параметрически уравнениями

$$x(t) = 4 \cos t + 3 \sin t, \quad y(t) = 3 \cos t - 4 \sin t, \quad \text{где } t \in [0, \pi].$$

№603. [8, № 2443] Найти длину дуги одной арки *циклоиды*

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad \text{где } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

№604. Вычислить длину дуги кривой

$$x(t) = 7 \cos^3 t, \quad y(t) = 7 \sin^3 t, \quad \text{где } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

№605. Вычислить длину дуги кривой

$$x = 6 - 3t^2, \quad y = 4t^3, \quad \text{если } x \geq 0.$$

№606. Найти длину дуги *винтовой линии*

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = aht, \end{cases} \quad \text{где } t \in [0, 2\pi].$$

№607. Найти длину дуги пространственной кривой

$$\begin{cases} x = t \sin t, \\ y = t \cos t, \\ z = \frac{2\sqrt{2}}{3}t\sqrt{t}, \end{cases} \quad \text{от точки } A(0, 0, 0) \text{ до точки } B\left(0, 2\pi, \frac{8}{3}\pi\sqrt{\pi}\right).$$

№608. [8, № 2440] Найти длину дуги *астроиды*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

№609. [8, № 2435] Найти длину дуги кривой

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, \quad \text{где } 1 \leq y \leq e.$$

Задачи, решаемые в полярной системе координат:

№610. [8, № 2446] Найти длину дуги *спирали Архимеда*

$$r = a\varphi \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

№611. Найти длину дуги *логарифмической спирали*

$$r = ae^{b\varphi}$$

от точки (φ_0, r_0) до точки (φ, r) .

№612. [8, № 2448] Найти длину дуги *кардиоиды*

$$r = a(1 + \cos \varphi).$$

№613. Найти длину дуги кривой

$$r = 3(1 + \sin \varphi), \quad \text{где } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right].$$

№614. [8, № 2450] Найти длину дуги кривой, заданной уравнением

$$r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}.$$

№615. Найти длину дуги кривой

$$r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}, \quad \text{где } \varphi \in [0, 2\pi].$$

№616. [8, № 2452(б)] Найти длину дуги кривой, заданной уравнением

$$\varphi = \sqrt{r} \quad (0 \leq r \leq 5).$$

№617. [8, № 2452(а)] Найти длину дуги кривой, заданной уравнением

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \quad (1 \leq r \leq 3).$$

№618. Найти длину дуги кривой

$$\varphi = \int_0^r \frac{\operatorname{sh} r}{r} dr \quad (0 \leq r \leq R).$$

№619. Найти длину дуги параметрически заданной кривой

$$r(t) = te^{2t}, \quad \varphi(t) = t^2 + 2t, \quad \text{где } t \in [0, 2].$$

№620. Найти длину дуги параметрически заданной кривой

$$r(t) = 1 + \cos t, \quad \varphi(t) = t - \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad \text{где } 0 \leq t \leq T < \pi.$$

14.5 Ответы и решения

593. Постройте эскиз графика цепной линии, чтобы наглядно увидеть дугу, длина которой вычисляется. Так как $y'_x = \text{sh}(x/a)$, $1 + (y'_x)^2 = 1 + \text{sh}^2(x/a) = \text{ch}^2(x/a) \geq 0$, то

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \int_0^b \sqrt{\text{ch}^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^b \text{ch} \frac{x}{a} dx = a \text{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \text{sh} \frac{b}{a} \text{ (ед.)}$$

594. Имеем

$$\begin{aligned} L &= \int_0^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)^2} dx = \int_0^b \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \\ &= \left(-x + \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) \Big|_0^b = \ln 3 - \frac{1}{2} \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

595. Имеем при явном задании функции:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{2ax}{a^2 - x^2} \right)^2} dx = \\ &= \int_0^b \sqrt{\left(\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} \right)^2} dx = \int_0^b \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} dx = \int_0^b \frac{x^2 - a^2 + 2a^2}{a^2 - x^2} dx = \\ &= - \int_0^b dx + 2a^2 \int_0^b \frac{dx}{a^2 - x^2} = -b + 2a^2 \cdot \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \Big|_0^b = -b + a \ln \frac{a+b}{a-b} \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

596. По формуле (1) необходимо найти интеграл $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx$. Вычислим неопределённый интеграл $I = \int \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx$:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx = x\sqrt{1 + 4a^2 x^2} - \int \frac{4a^2 x^2 dx}{\sqrt{1 + 4a^2 x^2}} = \\ &= x\sqrt{1 + 4a^2 x^2} - \int \frac{(1 + 4a^2 x^2) - 1}{\sqrt{1 + 4a^2 x^2}} dx = x\sqrt{1 + 4a^2 x^2} - \int \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx + \\ &+ \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4a^2 x^2}} = x\sqrt{1 + 4a^2 x^2} - I + \frac{1}{2a} \ln \left| 2ax + \sqrt{1 + 4a^2 x^2} \right|. \end{aligned}$$

Решая это уравнение относительно I , находим

$$I = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + 4a^2 x^2} + \frac{1}{4a} \ln \left| 2ax + \sqrt{1 + 4a^2 x^2} \right| + C.$$

Таким образом, $L = \frac{1}{2}\sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{4a} \ln |2a + \sqrt{1+4a^2}|$ (ед.).

597. Если сложить эти уравнения, то получим $x + y = 1$, или $y = 1 - x$, где $0 \leq x \leq 1$, т. е. ищется длина отрезка прямой (постройте эскиз графика), и задача становится тривиальной. Оставим этот способ для проверки и решим задачу иначе – с привлечением формулы вычисления длины дуги кривой, заданной параметрически (на зачёте будет проверяться именно знание новых для вчерашнего школьника методов):

$$\begin{aligned} L &= \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2 \cos t \sin t)^2 + (2 \sin t \cos t)^2} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 \sin^2 2t} dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

598. Можно было бы увидеть, что данная кривая симметрична кривой из предыдущей задачи относительно оси Ox , а при симметрии длина кривой сохраняется, и сразу получить ответ: $L = \sqrt{2}$. С другой стороны, можно было вычесть уравнения друг из друга и получить явную зависимость y от x : $y = x - 1$, где $0 \leq x \leq 1$. Решим задачу с помощью формулы вычисления длины кривой, заданной параметрически:

$$\begin{aligned} L &= \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{(-2 \cos t \sin t)^2 + (-2 \sin t \cos t)^2} dt = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{2 \sin^2 2t} dt = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |\sin 2t| dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \sqrt{2} \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

599. Заметим, что $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$, т. е. вся кривая расположена в 1-й четверти. Кроме того, при изменении параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ точка пробегает всю кривую от $(1, 0)$ до $(0, 1)$ (выпуклость вниз, достаточно подставить промежуточную точку $\frac{\pi}{4}$), а при дальнейшем увеличении t от $\frac{\pi}{2}$ до π , возвращается по кривой (самоналожением) обратно. Поэтому в качестве промежутка интегрирования можно взять отрезок $[0, \frac{\pi}{2}]$. Вычислим производные: $x'(t) = -4 \cos^3 t \cdot \sin t$, $y'(t) = 4 \sin^3 t \cdot \cos t$, $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 16 \sin^2 t \cdot \cos^2 t \cdot (\sin^4 t + \cos^4 t) = 4 \sin^2 2t \cdot (1 - \frac{\sin^2 2t}{2}) = 2 \sin^2 2t (1 + \cos^2 2t)$. Тогда

$$\begin{aligned} L &= \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 \sin^2 2t (1 + \cos^2 2t)} dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{1 + \cos^2 2t} dt = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 2t} d(\cos 2t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos 2t \sqrt{1 + \cos^2 2t} + \ln \left| \cos 2t + \sqrt{1 + \cos^2 2t} \right| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(2\sqrt{2} + \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) \text{ (ед.)},
\end{aligned}$$

т. к. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C.$

Замечание. В данном случае удаётся выразить явно y через x :

$$y = \sin^4 t = (1 - \cos^2 t)^2 = (1 - \sqrt{x})^2.$$

600. Задачу можно решать стандартно, используя формулу длины дуги плоской кривой при её параметрическом задании. Однако здесь есть другой способ решения. Заметим, что это окружность радиуса 2 с центром в точке $(1, -3)$. Для того чтобы убедиться в этом, возведём в квадрат и сложим параметрические уравнения:

$$x^2 + y^2 = 4 \cos^2 t + 4 \cos t + 1 + 4 \sin^2 t - 12 \sin t + 9,$$

$$x^2 + y^2 = 4 + 2(2 \cos t + 1) - 2 - 6(2 \sin t - 3) - 18 + 10,$$

$$x^2 + y^2 = 2x - 6y - 6 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4.$$

Поэтому длина кривой равна $L = 2\pi R = 4\pi$ (ед.).

601. Найдём производные: $x'(t) = 3 \operatorname{ch}^2 t \operatorname{sh} t$, $y'(t) = 3 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t$, тогда $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t (\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t) = \frac{9}{4} \operatorname{sh}^2 2t \operatorname{ch} 2t$ и приходим к интегралу

$$\begin{aligned}
L &= \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \frac{3}{2} \int_0^T \sqrt{\operatorname{ch} 2t} \cdot \operatorname{sh} 2t dt = \\
&= \frac{3}{4} \int_0^T \sqrt{\operatorname{ch} 2t} d(\operatorname{ch} 2t) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} (\operatorname{ch} 2t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^T = \frac{1}{2} \left((\operatorname{ch} 2T)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \text{ (ед.)}
\end{aligned}$$

602. Возводя в квадрат оба уравнения системы и складывая их, получаем уравнение $x^2 + y^2 = 5^2$, которое определяет окружность с центром в начале координат и радиусом 5. Длина полуокружности равна $L = \pi R = 5\pi$ (ед.).

603. Имеем по формуле $L = \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} dt = \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a \text{ (ед.)}
\end{aligned}$$

604. Система описывает левую верхнюю дугу астроида. Причём кривая проходит справа налево (в соответствии с возрастанием параметра). Чтобы воспользоваться формулой $L = \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$, вычислим предварительно $x'(t) = -21 \cos^2 t \sin t$, $y'(t) = 21 \sin^2 t \cos t$, тогда $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 21 |\sin t \cos t|$. Поскольку на сегменте $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ подмодульное выражение отрицательно, то для длины дуги получаем интеграл

$$L = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = -21 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \cos t dt = -\frac{21}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2t dt = \frac{21}{2} \text{ (ед.)}$$

605. Найдём пределы интегрирования: т. к. $x \geq 0$, то $6 - 3t^2 \geq 0$, т. е. $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Поэтому приходим к интегралу

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{(-6t)^2 + (12t^2)^2} dt = \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{36t^2(1 + 4t^2)} dt = 12 \int_0^{\sqrt{2}} t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \dots = 26 \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

606. Вычислим производные: $x'(t) = -a \sin t$, $y'(t) = a \cos t$, $z'(t) = ah$, тогда

$$\begin{aligned} L &= \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 h^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + h^2} dt = 2\pi a \sqrt{1 + h^2} \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

607. Найдём производные: $x'(t) = \sin t + t \cos t$, $y'(t) = \cos t - t \sin t$, $z'(t) = \sqrt{2}t$, тогда $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = (t + 1)^2$. Заметим, что точке A соответствует значение параметра $t = 0$, а точке B — значение $t = 2\pi$. Тогда по формуле (4) имеем

$$L = \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} (t + 1) dt = 2\pi^2 + 2\pi \text{ (ед.)}$$

608. 1-й способ. Воспользуемся параметрическими уравнениями кривой: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Принимая во внимание симметрию кривой относительно координатных осей, получаем:

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 6a \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

2-й способ. Выразим явно $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, тогда $y' = \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{-x^{\frac{1}{3}}}$ и имеем

$$\frac{L}{4} = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = \int_0^a \sqrt[3]{\frac{a}{x}} dx = \left| t = \sqrt[3]{x} \right| = 3\sqrt[3]{a} \int_0^{\sqrt[3]{a}} t dt = \frac{3a}{2} \text{ (ед.)}$$

609. Выберем y в качестве переменной интегрирования и учтём, что $x'(y) = \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y}\right)$:

$$\begin{aligned} L &= \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(y - \frac{1}{y}\right)^2} dy = \int_1^e \sqrt{\frac{1}{4} \left(y^2 + 2 + \frac{1}{y^2}\right)} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^e \left(y + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} + \ln y\right) \Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2 + 1) \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

610. Имеем в полярных координатах:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} d\varphi = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = \frac{a}{2} \left(\varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \ln \left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1} \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{a}{2} \left(2\pi \sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln \left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1} \right) \right) \text{ (ед.)}, \end{aligned}$$

в силу табличного интеграла

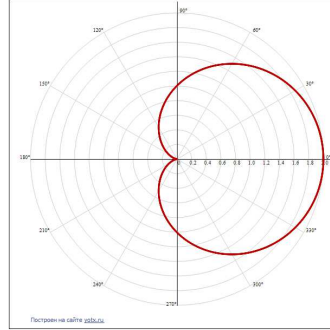
$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

611. По формуле (5) имеем

$$\begin{aligned} L &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{a^2 e^{2b\varphi} + a^2 b^2 e^{2b\varphi}} d\varphi = a\sqrt{1 + b^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{b\varphi} d\varphi = \frac{a}{b} \sqrt{1 + b^2} (e^{b\varphi} - e^{b\varphi_0}) = \\ &= \frac{\sqrt{1 + b^2}}{b} (r - r_0) \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

612. Кривая замкнута (Рис. 139), симметрична относительно полярной оси, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Вычислим $r'(\varphi) = -a \sin \varphi$, $r^2(\varphi) + r'^2(\varphi) = 2a^2(1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, то

$$L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi =$$

Рис. 139: Кардиоида $r = a(1 + \cos \varphi)$.

$$= 4a \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = 8a \text{ (ед.)}$$

613. Найдём $r'_\varphi = 3 \cos \varphi$, тогда

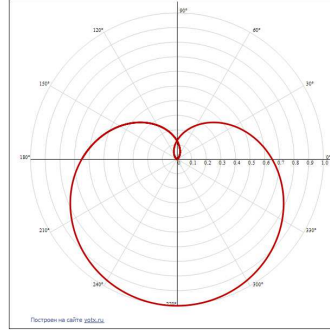
$$\begin{aligned} L &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sqrt{18(1 + \sin \varphi)} d\varphi = \\ &= 3\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sqrt{\left(\sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку на промежутке интегрирования $\sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} > 0$ (объясните, почему), то

$$L = 3\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 6\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} - 1\right) \text{ (ед.)}$$

614. Кривая замкнута, периодична с периодом $T = 6\pi$, при возрастании φ от 0 до 3π она выходит из начала координат и, самопересекаясь ($r(\frac{\pi}{2}) = r(\frac{5\pi}{2})$), возвращается в него, симметрична относительно оси ординат (Рис. 140). Таким образом,

$$\begin{aligned} L &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = \\ &= a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \frac{a}{2} \int_0^{3\pi} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = \frac{3\pi a}{2} \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

Рис. 140: Кривая $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

615. Поскольку $r'_\varphi = \frac{a}{2 \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2}}$, то $r^2 + r'^2 = a^2 \left(\operatorname{th}^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4 \operatorname{ch}^4 \frac{\varphi}{2}} \right) =$

$$= \frac{a^2}{4 \operatorname{ch}^4 \frac{\varphi}{2}} \left(4 \operatorname{sh}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} + 1 \right) = \frac{a^2}{4 \operatorname{ch}^4 \frac{\varphi}{2}} (\operatorname{sh}^2 \varphi + 1) = \frac{a^2}{4 \operatorname{ch}^4 \frac{\varphi}{2}} \operatorname{ch}^2 \varphi.$$

Тогда для длины дуги имеем интеграл

$$\begin{aligned} L &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{\operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \\ &= a \int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} = a \left(\varphi - \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = a(2\pi - \operatorname{th} \pi) \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

616. Имеем при $\varphi(r_0) = \varphi_0$, $\varphi(r_1) = \varphi_1$ и с учётом $\varphi'(r) > 0$:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\varphi'(r)} \right)^2} \varphi'(r) dr = \\ &= \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{(r \cdot \varphi'(r))^2 + 1} dr = \int_0^5 \sqrt{\frac{r}{4} + 1} dr = 4 \int_0^5 \sqrt{\frac{r}{4} + 1} d\left(\frac{r}{4} + 1\right) = 6\frac{1}{3} \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

617. Воспользуемся формулой: $L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$. Перейдём под знаком интеграла к переменной интегрирования r :

$$d\varphi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) dr, \quad r'(\varphi) = \frac{1}{\varphi'(r)} = \frac{2r^2}{r^2 - 1},$$

$$\begin{aligned} \text{тогда } L &= \int_1^3 \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\varphi'(r)}\right)^2} \varphi'(r) dr = \int_1^3 \sqrt{(r \cdot \varphi'(r))^2 + 1} dr = \\ &= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right)^2} dr = \left(\frac{r^2}{4} + \frac{1}{2} \ln r\right) \Big|_1^3 = 2 + \frac{1}{2} \ln 3 \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

Заметим, что при $r = 1$ производная $r'(\varphi)$ обращается в бесконечность, однако для подынтегральной функции это точка устранимого разрыва и не оказывает влияния на значение интеграла.

618. Продифференцировав функцию по переменной r , найдём r'_φ :

$$\varphi'_r = \left(\int_0^r \frac{\text{sh } r}{r} dr\right)' = \frac{\text{sh } r}{r} \Rightarrow r'_\varphi = \frac{1}{\varphi'_r} = \frac{r}{\text{sh } r}.$$

Тогда $r^2 + r'^2 = r^2 + \frac{r^2}{\text{sh}^2 r} = r^2 \cdot \frac{\text{sh}^2 r + 1}{\text{sh}^2 r} = r^2 \cdot \frac{\text{ch}^2 r}{\text{sh}^2 r}$. Вычислим длину дуги:

$$L = \int_0^R \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\varphi'(r)}\right)^2} \varphi'(r) dr = \int_0^R r \cdot \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r} \cdot \frac{\text{sh } r}{r} dr = \text{sh } r \Big|_0^R = \text{sh } R \text{ (ед.)}.$$

619. Имеем $r'(t) = e^{2t}(1 + 2t)$, $\varphi'(t) = 2t + 2$, тогда $r^2(t)(\varphi'(t))^2 + (r'(t))^2 = e^{4t}(2t^2 + 2t + 1)^2$ и воспользуемся формулой (7):

$$L = \int_{T_0}^T \sqrt{r^2(t)(\varphi'(t))^2 + (r'(t))^2} dt = \int_0^2 e^{2t}(2t^2 + 2t + 1) dt = \frac{1}{2}(9e^4 - 1) \text{ (ед.)}$$

620. Поскольку $\varphi'(t) = 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos t}{2 \cos^2 \frac{t}{2}}$, $r'(t) = -\sin t$, то для длины дуги получаем

$$\begin{aligned} L &= \int_{T_0}^T \sqrt{r^2(t)(\varphi'(t))^2 + (r'(t))^2} dt = \int_0^T \sqrt{(1 + \cos t)^2 \left(\frac{\cos t}{2 \cos^2 \frac{t}{2}}\right)^2 + (-\sin t)^2} dt \\ &= \int_0^T dt = T \text{ (ед.)} \end{aligned}$$

15 СЕМИНАР: Объём и площадь поверхности тел вращения. Вычисление объёмов по известным поперечным сечениям

*«Я – счастливый человек: я зарабатываю больше, чем мне надо,
и делаю то, что мне нравится».*

*Михаил Задорнов (1948–2017) – советский и
российский писатель-сатирик, драматург,
юморист и актёр.*

Домашнее задание: 621, 624, 627, 628, 634, 635, 638, 641, 642, 647, 654.
+ Подготовка к контрольной работе (в пятницу).

15.1 Кубируемость (измеримость множеств в $\mathbb{R}^3$). Объём пространственного тела

Понятие объёма тела вводится во многом аналогично понятию площади плоской фигуры. При этом термин «многоугольник» следует заменить термином его пространственного аналога – «многогранника», термин «многоугольная фигура» – термином «многогранное тело», а понятие «квадрируемость», соответственно, понятием «кубируемость».

Для последующего изложения материала нам понадобятся некоторые определения.

Объём многогранного тела. Назовём *телом* ограниченное в пространстве множество, обладающее двумя свойствами: 1) у него есть внутренние точки, и любые две из них можно соединить непрерывной линией (например, ломаной), целиком лежащей внутри множества; 2) множество содержит свою границу.¹ Граница тела называется также его *поверхностью*.

Многогранным телом в пространстве назовём множество, являющееся объединением конечного числа (ограниченных) многогранников.²

¹Согласно первому условию, множество является *связным*. Поэтому геометрическая фигура, состоящая из объединения двух шаров, не имеющих общих точек, строго говоря, телом уже не считается. Точно так же не считается телом фигура, состоящая из двух шаров, имеющих лишь одну общую точку. Второе условие означает, что тело – это замкнутое множество точек, граница тела принадлежит ему, так что шар без соответствующей сферы или даже шар без одной её точки – уже не тело.

²Напомним, что *многогранником* называют тело, граница (поверхность) которого есть объединение конечного числа многоугольников, причём каждая сторона каждого такого многоугольника является стороной ещё одного (и только одного) многоугольника. Такую поверхность называют *замкнутой многогранной поверхностью*. Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его *гранями*.

В элементарной стереометрии было введено понятие объёма для простейших пространственных тел, в том числе для многогранников. Отмечалось, что объём тела – это неотрицательное число, поставленное в соответствие этому телу, которое обладает следующими *свойствами*.

1. (*Инвариантность*). Равные тела имеют равные объёмы.
2. (*Аддитивность*). Если тело является объединением конечного числа тел, любые два из которых не имеют общих внутренних точек, то объём данного тела равен сумме объёмов составляющих его тел.
3. (*Существование единицы объёма*). Объём куба, длина ребра которого равна единице измерения длин отрезков, равен одной кубической единице и принимается за единицу измерения объёмов.

Тела, имеющие равные объёмы, назывались *равновеликими*. Заметим, что аналогичными свойствами характеризуются и площади плоских фигур, и длины отрезков (дуг кривых).

Объём пространственного тела в общем случае. Введём понятие объёма для произвольного (ограниченного) тела F в пространстве. Рассмотрим для этого всевозможные многогранные тела P , целиком содержащиеся в F , и многогранные тела Q , целиком содержащие F . Тела P будем называть *вписанными в F* , а тела Q – *описанными около F* .

Числовое множество $\{V(P)\}$ объёмов всех вписанных в F многогранных тел P ограничено сверху, например, объёмом любого описанного многогранного тела Q . Поэтому это множество имеет конечную точную верхнюю грань

$$\underline{V} = \sup_{P \subseteq F} V(P),$$

которую будем называть *нижним объёмом* тела F . Если в тело F нельзя вписать ни одного многогранника, то по определению полагается

$$\underline{V} = 0.$$

Аналогично, числовое множество $\{V(Q)\}$ объёмов всех описанных около тела F многогранных тел Q ограничено снизу, например, объёмом любого вписанного многогранного тела или нулём, и поэтому у него существует конечная точная нижняя грань

$$\overline{V} = \inf_{Q \supseteq F} V(Q),$$

называемая *верхним объёмом* тела F . Очевидно, что $\underline{V} \leq \overline{V}$.

Тело F называется *кубируемым* (т. е. имеющим конечный объём; *измеримым* в пространстве $\mathbb{R}^3$), если $\underline{V} = \overline{V}$. Число $V = \underline{V} = \overline{V}$ называется при этом *объёмом тела F* (по Жордану).¹ Будем говорить, что тело F имеет объём

¹Объём тела F также называют его *мерой Жордана*.

ём, равный нулю, если это тело содержится в многогранном теле сколь угодно малого объёма.

15.2 Достаточные условия кубирования и вычисление объёмов тел вращения

Илон Маск утверждает:

«Предприниматель должен быть готов «ходить по краю бездны», работать по 80 часов¹ в неделю и постоянно решать самые сложные проблемы компании, а вовсе не «заниматься любимым делом». Человек, посвящающий себя бизнес-миссии, находится в постоянном движении и стрессе. Именно поэтому далеко не каждый может быть успешным бизнесменом.

К основным типам задач, связанных с вычислением объёмов тел при помощи определённого интеграла Римана,² относятся вычисление объёмов тел вращения и вычисление объёмов тел по известным поперечным сечениям. В общем случае приходится выполнять разбиение тела на несколько более простых тел, и вычислять объём тела как сумму объёмов составляющих его тел.

Напомним, что *телом вращения* называется тело, образованное при вращении плоской ограниченной замкнутой фигуры F вокруг прямой, лежащей в плоскости этой фигуры и не содержащей её внутренних точек. Прямая, вокруг которой осуществляется вращение, называется *осью* тела вращения.

Обратимся к достаточным условиям кубирования тел в простейших случаях. Мы начнём с вычисления объёмов тел вращения и рассмотрим разные способы задания кривых, ограничивающих вращаемую криволинейную трапецию.

I. Объём тел вращения в декартовых координатах.

а) *Случай, когда криволинейная трапеция задана стандартно относительно оси Ox и вращается вокруг оси Ox .* Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда тело F_x , образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y(x) \in C[a, b]\},$$

кубируемо, и его объём V_x может быть вычислен по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx. \quad (1)$$

¹Обычная рабочая неделя длится в два раза меньше.

²Объём тела в пространстве, как вы увидите позже, может быть вычислен также при помощи двойных и тройных интегралов.

Пример 208. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{x-3}, \quad y = 0, \quad x = 4, \quad x = 6.$$

Решение. Сделаем чертёж, чтобы представить себе это тело вращения, и выпишем интеграл, значение которого численно равно объёму этого тела:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx = \pi \int_4^6 (\sqrt{x-3})^2 dx = 4\pi \text{ (куб. ед.)}. \quad \square$$

Рассмотрим обобщение данной формулы. Пусть функции $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ неотрицательны и непрерывны на сегменте $[a, b]$, причём $y_1(x) \leq y_2(x)$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда тело F_x , образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), y_1(x), y_2(x) \in C[a, b]\},$$

кубируемо, и его объём V_x может быть вычислен по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx. \quad (1.a)$$

б) *Случай, когда криволинейная трапеция задана стандартно относительно оси Oy и вращается вокруг оси Oy .* Пусть функция $x = x(y)$ непрерывна и неотрицательна на сегменте $[c, d]$. Тогда тело F_y , образованное вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции

$$F = \{(x; y) \mid c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq x(y), x(y) \in C[c, d]\},$$

кубируемо, и его объём V_y вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy. \quad (2)$$

Аналогично рассмотренному выше справедливо следующее обобщение формулы (2). Пусть функции $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ неотрицательны и непрерывны на сегменте $[c, d]$, причём $x_1(y) \leq x_2(y)$ при всех $y \in [c, d]$. Тогда тело F_y , образованное вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции

$$F = \{(x; y) \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y), x_1(y), x_2(y) \in C[c, d]\},$$

кубируемо, и его объём V_y может быть вычислен по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d (x_2^2(y) - x_1^2(y)) dy. \quad (2.a)$$

в) *Случай, когда криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями.* Пусть функция $y(x)$ допускает параметризацию с помощью уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T]$, и при изменении параметра t от T_0 до T точка $(x(t), y(t))$ движется по кривой так, что криволинейная трапеция остаётся слева (при этом $x(t)$ убывает и поэтому $x(T_0) = b$, $x(T) = a$). Переходя в подынтегральном выражении в формуле (1) к переменной интегрирования t , получим следующую формулу для вычисления объёма тела вращения для этого случая:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx = -\pi \int_{T_0}^T y^2(t) x'(t) dt. \quad (3)$$

Аналогично можно адаптировать на случай параметрического задания границы криволинейной трапеции формулу (2):

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy = \pi \int_{T_0}^T x^2(t) y'(t) dt. \quad (4)$$

Здесь при изменении параметра от T_0 до T в (4) кривая тоже проходит против часовой стрелки (криволинейная трапеция остаётся слева), при этом $y(t)$ является возрастающей функцией и $y(T_0) = c$, $y(T) = d$.

Формулы (3) и (4) самые общие, их можно использовать как для незамкнутых кривых, так и для замкнутых контуров вращения.

Замечание 1. Можно встретить упрощённое использование формул (3), (4) с применением модуля, например:

$$V_x = \pi \left| \int_{T_0}^T y^2(t) x'(t) dt \right|. \quad (3')$$

Замечание 2. При параметризации $x = r(\varphi) \cos \varphi$, $y = r(\varphi) \sin \varphi$ (с параметром φ) из (3') мы получим следующую формулу для вычисления объёма тела вращения:

$$V_x = \pi \left| \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi) \sin^2(\varphi) (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi) d\varphi \right|.$$

Пример 209. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Решение. Данная поверхность вращения называется *эллипсоидом вращения*, или *сфероидом*. В случае $a = b$ получаем *сферу*. Решим задачу с помощью формулы (3).

В силу симметрии эллипса, вычислим объём тела вращения для $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, а результат удвоим:

$$\begin{aligned} V_x &= -\pi \int_{T_0}^T y^2(t)x'(t)dt = -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2(t)x'(t)(b \sin t)^2(a \cos t)'dt = \\ &= 2\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \sin t dt = 2\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)(-d(\cos t)) = \frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ (куб. ед.)}. \quad \square \end{aligned}$$

г) *Случай, когда криволинейная трапеция задана стандартно относительно оси Ox , но вращается вокруг оси Oy .* Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда тело F_y , образованное вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции

$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x)\}$$

кубируемо, и его объём V_y может быть вычислен по формуле

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot y(x)dx. \quad (5)$$

Аналогичную формулу имеем в случае, когда криволинейная трапеция задана стандартно относительно оси Oy , но вращается вокруг оси Ox :

$$V_x = 2\pi \int_c^d y \cdot x(y)dy. \quad (6)$$

Пример 210. Вычислить объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $8x = y^2$, вокруг оси ординат.

Решение. Сделаем чертёж (Рис. 141) и определим абсциссы точек пересечения графиков (пределы интегрирования). Затем воспользуемся обобщением формулы (5):

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_a^b x(y_2(x) - y_1(x))dx = 2\pi \int_0^2 x(\sqrt{8x} - x^2)dx = \\ &= 2\pi \int_0^2 (\sqrt{8x^3} - x^3)dx = 4,8\pi \text{ (куб. ед.)}. \quad \square \end{aligned}$$

II. Объём тел вращения в полярных координатах.

Обратимся к случаю, когда криволинейный сектор в полярной системе координат вращается вокруг полярной оси OP . Пусть функция $r = r(\varphi)$ непрерывна на сегменте $[\varphi_0, \varphi_1]$. Тогда тело F_p , образованное вращением вокруг полярной оси криволинейного сектора

$$F = \{(r; \varphi) \mid 0 \leq \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \leq \pi, 0 \leq r \leq r(\varphi)\},$$

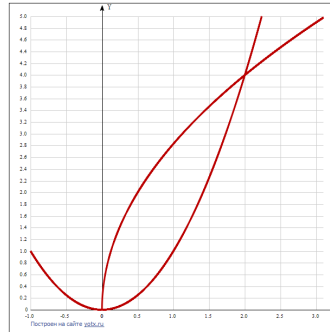


Рис. 141: Кривые $y = x^2$, $8x = y^2$.

кубируемо, и его объём V_p может быть вычислен по формуле

$$V_p = \frac{2\pi}{3} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (7)$$

Если же кривая, ограничивающая сектор, задана явно уравнением $\varphi = \varphi(r) \in C^1[r_0, r_1]$, то из формулы (7), переходя к переменной интегрирования r , получаем соответствующий аналог

$$V_p = \frac{2\pi}{3} \int_{r_0}^{r_1} r^3 \cdot \sin(\varphi(r)) \cdot |\varphi'(r)| dr. \quad (8)$$

Говоря о телах вращения, нельзя обойти вниманием вторую теорему Паппа—Гюльдена (об объёме тела вращения).

Теорема (Гюльдена, вторая). Объём тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, расположенной в той же плоскости и не пересекающей фигуру, равен площади фигуры, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести (барицентром) фигуры.

15.3 Вычисление объёмов тел с известными площадями поперечных сечений

*«Ученикам, чтобы преуспеть,
надо догонять тех, кто впереди,
и не ждать тех, кто позади».*

*Аристотель (384 до н. э.—322 до н. э.) —
древнегреческий философ. Ученик Платона и
воспитатель Александра Македонского.*

Рассмотрим в прямоугольной системе координат $Oxyz$ некоторое кубируемое тело F , расположенное между плоскостями $x = a$ и $x = b$ так, что при любом $x \in [a, b]$ известна площадь $S(x)$ сечения данного тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке x .

Пусть площадь $S(x)$ сечения тела F как функция x непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда объём тела F вычисляется по формуле

$$V_x = \int_a^b S(x) dx. \quad (9)$$

Естественно, существуют ещё две симметричные формулы для случаев, когда известны площади (поперечных) сечений тела плоскостями, перпендикулярными осям Oy и Oz :

$$V_y = \int_c^d S(y) dy, \quad (10)$$

$$V_z = \int_m^n S(z) dz. \quad (11)$$

Пример 211. Вычислить объём тела, ограниченного однополостным гиперболоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и плоскостями $z = 0$ и $z = h$ ($h > 0$).

Решение. Здесь удобно рассмотреть сечения данного тела плоскостями, перпендикулярными оси Oz . Тогда объём выразится формулой (11). Найдём функцию площади сечения $S(z)$. При пересечении однополостного гиперболоида плоскостью $z = z_0$ ($0 \leq z_0 \leq h$) получается эллипс, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} = 1,$$

откуда находим полуоси эллипса

$$a_1 = a\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}.$$

Тогда площадь эллипса выражается функцией

$$S(z_0) = \pi a_1 b_1 = \pi ab \left(1 + \frac{z_0^2}{c^2}\right), \quad \text{где } 0 \leq z_0 \leq h.$$

Осталось вычислить объём:

$$V_z = \int_0^h S(z) dz = \pi ab \int_0^h \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi abh \left(1 + \frac{h^2}{3c^2}\right) \text{ (куб. ед.)}. \quad \square$$

15.4 Вычисление площадей поверхностей тел вращения и некоторые другие приложения определённого интеграла

«С годами студент стал всё больше и больше сдавать»¹.

Константин Семёнович Мелихан (род. 1952) – советский и российский писатель, автор юмористических книг, карикатурист, телеведущий.

Определение поверхности в $\mathbb{R}^3$. Способы задания поверхностей.

Пусть в трёхмерном пространстве введена декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. Поверхностью назовём множество всех точек M , координаты x, y и z которых определяются системой двухпараметрических уравнений

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

где $(u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ обычно предполагаются непрерывными на Ω .

Помимо задания тремя параметрическими уравнениями, поверхность в декартовом пространстве может быть также задана *неявно* с помощью одного уравнения, не разрешённого относительно ни одной из переменных:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Пример 212. Параметрические уравнения

$$x = R \sin u \cos v, \quad y = R \sin u \sin v, \quad z = R \cos u, \quad \text{где } 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v < 2\pi, \quad R > 0,$$

определяют *сферу* радиуса R с центром в начале координат. Исключение параметров u, v из данных трёх параметрических уравнений (возведением в квадрат и сложением) приводит к классическому неявному уравнению сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad \square$$

Если поверхность задана в $\mathbb{R}^3$ одним из уравнений вида

$$z = z(x, y), \quad y = y(x, z), \quad x = x(y, z),$$

то говорят, что поверхность задана *явным образом*.²

¹Игра слов.

²При этом поверхность назовём *гладкой*, если она задаётся параметрическими уравнениями, где функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка в некоторой ограниченной замкнутой области Ω на плоскости (u, v) . В каждой точке такой поверхности существует касательная плоскость.

Понятие площади кривой поверхности. Рассмотрим незамкнутую гладкую поверхность S , ограниченную кусочно гладким контуром L . Разобьём эту поверхность сетью кусочно гладких кривых на конечное число частей (поверхностей $S_1, S_2, \dots, S_n$) и в каждой части S_k произвольно выберем по точке M_k ($k = \overline{1, n}$). Спроектировав ортогонально элемент поверхности S_k на касательную плоскость к поверхности в точке M_k , мы получим в проекции плоскую фигуру T_k с площадью T_k . Назовём *площадью поверхности* S предел суммы этих площадей T_k при условии, что диаметры всех элементов S_k стремятся к нулю. Если через λ обозначить наибольший из упомянутых диаметров (диаметр разбиения), то получим, что¹

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n T_k.$$

Поверхность, имеющая конечную площадь, называется *квадрируемой*.

Вычисление площади поверхности вращения. Площадь поверхности, полученной вращением вокруг оси Ox дуги AB плоской гладкой кривой, находится по формуле²

$$S_{\text{пов.,x}} = 2\pi \int_A^B |y| dl,$$

где dl – дифференциал дуги.

Рассмотрим важнейшие частные случаи.

I. Площадь поверхности вращения в декартовых координатах.

а) *Случай параметрического задания кривой вращения.* Пусть плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, где $x(t)$, $y(t) \in C^1[T_0, T]$. Тогда площадь поверхности, полученной вращением дуги AB вокруг оси Ox , вычисляется по формуле

$$S_{\text{пов.,x}} = 2\pi \int_{T_0}^T |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (12)$$

¹Попытка ввести понятие площади кривых поверхностей как предела площадей вписанных многогранных поверхностей (подобно тому, как длина кривой определяется как предел вписанных ломаных) встречает трудность. Даже для весьма простой кривой поверхности площадь вписанных в неё многогранников со всё более мелкими гранями может иметь разные пределы в зависимости от выбора последовательности многогранников. Это наглядно демонстрирует известный пример, так называемый *сапог Шварца*, в котором последовательности вписанных многогранников с разными пределами площади строятся для боковой поверхности прямого кругового цилиндра. Тем не менее, площадь замкнутой выпуклой поверхности равна точной верхней грани площадей вписанных в неё выпуклых многогранных поверхностей.

²В общем случае для параметрически заданной кривой имеем формулу $S_{\text{пов.}} = 2\pi \int_{T_0}^T \rho(t) dl$, где $\rho(t)$ – расстояние от точки кривой до оси вращения.

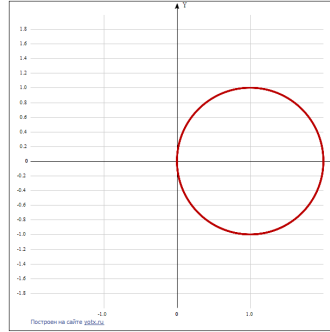


Рис. 142: Кривая $x(t) = \sin t + 1$, $y(t) = \cos t$.

Пример 213. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси абсцисс кривой

$$x(t) = \sin t + 1, \quad y(t) = \cos t.$$

Решение. Данная кривая – окружность радиуса 1 с центром в точке $(1, 0)$ (Рис. 142). Заметим, что вся поверхность (сфера) получается при вращении верхней полуокружности, которая проходит при изменении параметра от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому по формуле (12) имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{пов.,x}} &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2\pi (\sin t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi \text{ (кв. ед.)}. \quad \square \end{aligned}$$

б) *Случай явного задания кривой вращения.* Если кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, где функция $y(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $[a, b]$, то площадь поверхности, полученной вращением дуги кривой вокруг оси Ox , вычисляется по формуле

$$S_{\text{пов.,x}} = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (13)$$

Пример 214. Найти площадь поверхности шара радиуса R .

Решение. Можно считать, что поверхность шара образована вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, где $x \in [-R, R]$, вокруг оси Ox . Тогда по формуле (13) получаем

$$S_{\text{пов.,x}} = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2 + x^2} dx = 4\pi R^2 \text{ (кв. ед.)}. \square$$

II. Площадь поверхности вращения в полярных координатах.

в) Если кривая задана явно уравнением $r = r(\varphi)$, $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \leq \pi$, где функция $r(\varphi)$ непрерывна вместе со своей производной 1-го порядка на сегменте $[\varphi_0, \varphi_1]$, то площадь поверхности, полученной вращением дуги кривой вокруг полярной оси OP , вычисляется по формуле

$$S_{\text{пов.,OP}} = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} |r \sin \varphi| \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (14)$$

Пример 215. Найти площадь поверхности, полученной вращением *кардиоиды*

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad \text{где } \varphi \in [0, 2\pi], \quad a > 0,$$

относительно левой вертикальной касательной к этой кривой.

Решение. Сделаем чертёж (Рис. 143). Найдём уравнение этой вертикальной касательной. Запишем уравнение кардиоиды в параметрическом виде, взяв φ в качестве параметра. Имеем:

$$x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi, \quad y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi.$$

Для вертикальной касательной должно выполняться условие $x'(\varphi) = 0$. Найдём значения параметра φ , при которых это условие выполняется:

$$x' = -a \sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi) = 0,$$

откуда находим помимо ожидаемых точек $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ две дополнительные точки, которые нас интересуют как пределы интегрирования: $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Для обеих точек $x = -\frac{a}{4}$. Находим дифференциал дуги кардиоиды:

$$dl = \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = a \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi.$$

Расстояние от произвольной точки кардиоиды $(x(\varphi), y(\varphi))$ до прямой $x = -\frac{a}{4}$ равно:

$$\rho(\varphi) = x(\varphi) + \frac{a}{4} = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi + \frac{a}{4}.$$

Теперь найдём площадь поверхности:

$$S_{\text{пов.}} = 2\pi \int_0^{2\pi} \left(a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi + \frac{a}{4} \right) 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = (*)$$

Из рисунка видно, что мы можем рассмотреть интеграл при $0 \leq t \leq \pi$ (при этом

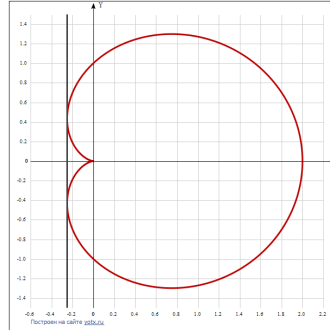


Рис. 143: Кривые $r = a(1 + \cos \varphi)$ и $x = -\frac{a}{4}$.

модуль раскрывается положительно) и удвоить его:

$$\begin{aligned}
 (*) &= 4\pi \int_0^\pi \left(a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi + \frac{a}{4} \right) 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\
 &= 4\pi a^2 \int_0^\pi \left(\frac{5}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{5\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
 &= 4\pi a^2 \left(5 \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\varphi}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{84}{5} \pi a^2 \text{ (кв. ед.)}. \quad \square
 \end{aligned}$$

г) Если кривая задана явно уравнением $\varphi = \varphi(r)$, $r \in [r_0, r_1]$, где функция $\varphi(r)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[r_0, r_1]$, то площадь поверхности, полученной вращением дуги кривой вокруг полярной оси OP , вычисляется по формуле

$$S_{\text{пов.,OP}} = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} |r \sin \varphi| \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\varphi'(r)} \right)^2} \cdot |\varphi'(r)| dr. \quad (15)$$

Если внести $|\varphi'(r)|$ под корень, то формула (15) примет вид

$$S_{\text{пов.,OP}} = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} |r \sin \varphi| \sqrt{r^2 (\varphi'(r))^2 + 1} dr. \quad (15')$$

Приведём утверждение, называемое *первой теоремой Гюльдена-Паппа*.

Теорема (Гюльдена, первая). Площадь поверхности, полученной от вращения кривой около некоторой не пересекающей её оси, равна длине дуги этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести кривой.

Физические и другие приложения определённого интеграла. Рассмотрим некоторые приложения из области физики, в частности, механики.

1. Вычисление массы плоской кривой. Пусть AB – дуга плоской гладкой кривой, $\rho(l)$ – линейная плотность массы в текущей точке кривой ($0 \leq l \leq L$). Тогда масса M кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_0^L \rho(l) dl, \quad \text{где } dl \text{ – дифференциал дуги.}$$

Пример 216. Найти массу неоднородного стержня длины 100 см, если линейная плотность стержня меняется по закону

$$\rho(x) = 20x + 0,15x^2 \quad (\text{г/см}),$$

где x – расстояние от одного из концов стержня.

Решение. Масса всего стержня находится по формуле

$$M = \int_0^{100} \rho(x) dx = \int_0^{100} (20x + 0,15x^2) dx = 150 \cdot 10^3 \text{ (г)} = 150 \text{ (кг)}.$$

Рассмотрим отдельные случаи.

а) Если кривая задана *явным образом* в декартовой системе координат уравнением $y = y(x)$, где $y(x) \in C^1[a, b]$, то её масса вычисляется по формуле

$$M = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

где $\rho(x)$ – линейная плотность.

б) Пусть простая плоская кривая задана в декартовой системе координат *параметрическими уравнениями* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, где $x(t)$, $y(t)$ непрерывны на $[T_0, T]$ вместе со своими первыми производными, и пусть $\rho(x(t), y(t))$ – линейная плотность распределения массы в точке $(x; y)$ этой кривой. Тогда масса кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_{T_0}^T \rho(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

в) В случае, когда кривая задана явным образом *в полярной системе координат* уравнением $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi) \in C^1[\varphi_1, \varphi_2]$, то масса кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

2. Координаты центра тяжести плоской кривой. Координаты центра тяжести дуги плоской кривой находятся по формулам

$$x_c = \frac{1}{L} \int_0^L x(l) dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_0^L y(l) dl.$$

а) В частности, если плоская кривая задана в декартовой системе координат *явным уравнением* $y = y(x)$, где $y(x) \in C^1[a, b]$, то координаты центра тяжести её дуги вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{1}{L} \int_a^b x dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_a^b y(x) dl,$$

где $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$, а длина дуги $L = \int_a^b dl$.

б) Если плоская кривая задана *параметрическими уравнениями* $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [T_0, T]$, $x(t), y(t) \in C^1[T_0, T]$, $x(T_0) = a$, $x(T) = b$, то координаты центра тяжести её дуги вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{1}{L} \int_{T_0}^T x(t) dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_{T_0}^T y(t) dl,$$

где $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$, а $L = \int_{T_0}^T dl$.

в) Если кривая задана *явно в полярной системе координат* уравнением $r = r(\varphi) \in C^1[\varphi_1, \varphi_2]$, то

$$x_c = \frac{1}{L} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \cos \varphi dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin \varphi dl,$$

где $dl = \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$, $L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dl$.

Пример 217. Найти декартовы координаты центра тяжести дуги *кардиоиды*

$$r = a(1 + \cos \varphi) \text{ от } \varphi = 0 \text{ до } \varphi = \pi.$$

Решение. Запишем параметрические уравнения кардиоиды:

$$x = r \cos \varphi = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi,$$

где параметр $\varphi \in [0, \pi]$. Так как длина кардиоиды равна $8a$, а $dl = \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} d\varphi = 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$, то

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{4a} \int_0^\pi x(\varphi) dl = \frac{1}{4a} \int_0^\pi a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi \cdot 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= a \int_0^\pi \cos \varphi \cos^3 \frac{\varphi}{2} d\varphi = \left| t = \frac{\varphi}{2} \right| = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^5 t - \cos^3 t) dt = \\ &= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2(1 - \sin^2 t)^2 - 1 + \sin^2 t) d(\sin t) = \frac{4}{5} a; \\ y_c &= \frac{1}{4a} \int_0^\pi y(\varphi) dl = \frac{1}{4a} \int_0^\pi a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \cdot 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \end{aligned}$$

$$= 2a \int_0^\pi \cos^4 \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{4}{5}a. \square$$

3. Координаты центра тяжести плоской фигуры. Координаты центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной неотрицательной функции $y = y(x)$, где $x \in [a, b]$, а снизу – осью абсцисс, в случае постоянной поверхностной плотности $\rho \equiv 1$ находятся по формулам

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b xy(x)dx, \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2(x)dx,$$

где $S = \int_a^b y(x)dx$ – площадь трапеции.

Если же трапеция ограничена сверху непрерывной линией $y = y_2(x)$, $x \in [a, b]$, снизу непрерывной линией $y = y_1(x)$, с боков – отрезками прямых $x = a$, $x = b$, то координаты её центра тяжести находятся по формулам

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b x(y_2(x) - y_1(x))dx, \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx,$$

где $S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx$ – площадь трапеции.

4. Работа по перемещению материальной точки из точки a оси Ox в точку b под действием параллельной оси Ox непрерывной переменной силы $F(x)$ численно равна интегралу

$$\int_a^b F(x)dx.$$

5. Путь S , пройденный материальной точкой, движущейся прямолинейно с непрерывной переменной скоростью $v(t)$ за промежуток времени $a \leq t \leq b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b v(t)dt.$$

При помощи определённого интеграла вычисляются статические моменты кривых и плоских фигур относительно координатных осей, моменты инерции. Имеются и другие многочисленные приложения определённого интеграла к задачам из разных областей знаний.

15.5 Задачи для самостоятельного решения

№621. Большинство кривых поверхностей мы привыкли видеть двусторонними. А бывают ли односторонние поверхности?

Вычисление объёмов тел вращения в прямоугольных координатах:

№622. Найти объём тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми

$$y = x^2, \quad y = |x|.$$

№623. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми

$$y = x^2, \quad y = |x|^3.$$

№624. [8, № 2473] Найти объём тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2x - x^2 \quad \text{и} \quad y = 0:$$

а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

№625. Найти объём тела, полученного вращением *эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вокруг оси Ox .

№626. [8, № 2472] Найти объём тела (*нейлоид*), ограниченного поверхностями, полученными при вращении вокруг оси Ox линии

$$y = b \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (0 \leq x \leq a).$$

№627. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$y = \frac{2}{1+x^2} \quad \text{и} \quad y = x^2.$$

№628. [8, № 2479] Найти объём тела, ограниченного поверхностями, полученными при вращении кривой

$$y = e^{-x} \sqrt{\sin x} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

вокруг оси Ox .

№629. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$y = 3 + \sqrt{x}, \quad y = 3 - \sqrt{x}, \quad y = x + 1.$$

№630. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$y = -\ln x, \quad y = 0, \quad x = 2.$$

№631. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс и линией

$$x(t) = \ln t, \quad y(t) = \sqrt{2t + 3}, \quad \text{если } t \in [2, 3].$$

№632. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной осью абсцисс и линией

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t - t^3, \quad \text{если } t \in [0, 1].$$

№633. Найти объём «веретенá», полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной *астроидой*

$$x(t) = \cos^3 t, \quad y(t) = \sin^3 t.$$

№634. [8, № 2480] Найти объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной аркой *циклоиды*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad \text{где } a > 0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

и прямой $y = 0$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = 2a$.

№635. [8, № 2482.1] Найти объём тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной петлёй кривой

$$x(t) = 2t - t^2, \quad y(t) = 4t - t^3,$$

а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

Задачи на вычисление объёмов тел вращения в полярных координатах:

№636. Вычислить объём тела, образованного вращением дуги кривой

$$r = 2 \cos \varphi, \quad \text{где } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

вокруг полярной оси.

№637. Вычислить объём тела, полученного вращением кривой

$$r = a \sin 2\varphi \quad (a > 0)$$

вокруг полярной оси.

№638. Вычислить объём тела, полученного вращением кривой

$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{r}{a}, \quad \text{где } 0 \leq r \leq a,$$

вокруг полярной оси.

Вычисление объёмов тел по известным поперечным сечениям:

№639. Найти объём n -угольной пирамиды с основанием S и высотой H .

№640. [8, № 2463] Найти объём тела (*эллипсоид*), ограниченного поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

№641. [8, № 2462] Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = \frac{c}{a} \cdot x, \quad z = 0.$$

№642. [8, № 2465] Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2.$$

Вычисление площадей поверхностей тел вращения:

№643. Вычислить площадь поверхности, полученной вращением кривой $y = \sin x$, где $0 \leq x \leq \pi$, вокруг оси Ox .

№644. Вычислить площадь поверхности, полученной вращением ломаной ABC , где $A(1, 5)$, $B(1, 2)$, $C(6, 2)$ вокруг оси Ox .

№645. Найти объём и боковую поверхность параболоида, образованного вращением параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси Ox и ограниченного плоскостью $x = H$.

№646. Вычислить площадь поверхности *то́ра*, полученного вращением вокруг оси Ox окружности

$$x^2 + (y - 3)^2 = 1.$$

№647. [8, № 2495] Найти площадь поверхности, образованной вращением арки *циклóиды*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad \text{где } a > 0, \quad t \in [0, 2\pi]:$$

а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = 2a$.

№648. [8, № 2492] Переходя к параметрическим уравнениям *астро́иды*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

найти площадь поверхности, образованной вращением этой кривой вокруг оси Ox .

№649. Хорда AB окружности Γ радиуса a находится на расстоянии b ($b < a$) от центра окружности. Найти площадь поверхности, полученной вращением вокруг этой хорды каждой из дуг Γ_1 и Γ_2 , на которые хорда делит окружность.

№650. Пусть Γ — часть кривой $y = 3x - x^3$, лежащая в правой полуплоскости ($x \geq 0$) выше прямой $y = x$. Найти площадь поверхности, полученной вращением Γ вокруг прямой $y = x$.

№651. [8, № 2497] Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси *карди́иды*

$$r = a(1 + \cos \varphi).$$

№652. Вычислить площадь *шарового пояса*, образованного вращением вокруг полярной оси дуги окружности $r = \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$.

№653. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси *лемниска́ты Бернулли*

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

№654. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг луча $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ кривой

$$r = \cos \varphi - \sin \varphi.$$

№655. Кривая $r = \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})}$ пересекает полярную ось в точке A , а кривая $r = \frac{15}{\sqrt{10} \sin(\varphi + \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}})}$ пересекает полярную ось в точке C , причём эти кривые пересекаются в точке B . Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси ломаной ABC .

№656. Найти координаты центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и прямыми $y = 0$ и $x = 1$.

№657. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной прямой $y = \frac{2}{\pi}x$ и синусоидой $y = \sin x$ при $x \geq 0$.

№658. Пользуясь второй теоремой Гюльдена, найти объём тела, полученного при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через его вершину перпендикулярно диагонали, если длина прямоугольника равна 8, а ширина 6.

№659. Применяя вторую теорему Гюльдена, найти координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной одной аркой *циклоиды*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad \text{где } a > 0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

и осью Ox .

№660. Пользуясь теоремами Гюльдена, найти площади поверхности и объёмы торов, образованных вращением круга

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

вокруг осей Ox и Oy ($a \geq r, b \geq r$).

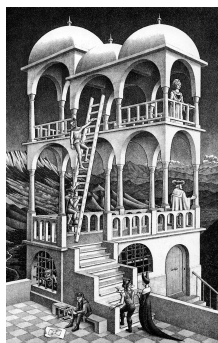


Рис. 144: Гравюра М. Эшера.

15.6 Ответы и решения

621. Почитайте о ленте Мёбиуса и бутылке Клейна. Лист Мёбиуса изображен на ряде эмблем, связанных с математикой, в том числе (вместе со знаком интеграла) на логотипе механико-математического факультета МГУ. Интересующимся можно прочесть также о поразительных математических картинах нидерландского художника-графика Маурица Эшера (см. Рис. 144) и о графических работах математика Анатолия Фоменко.

622. Построив эскизы графиков, определяем взаимное расположение и точки пересечения этих графиков (Рис. 145). Подставляя в формулу и учитывая симметрию фигуры, получим

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx = 2\pi \int_0^1 (|x|^2 - x^4) dx = \\ &= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{15} \text{ (куб. ед.)} \end{aligned}$$

623. $\frac{4\pi}{35}$ (куб. ед.) См. решение предыдущей задачи.

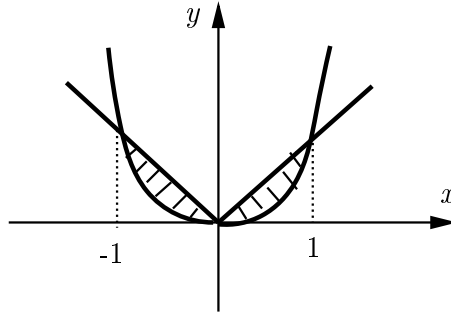
624. Найдём абсциссы точек пересечения графиков функций (пределы интегрирования, сделайте рисунок).

а) Применяя формулу (1), получим

$$V_x = \pi \int_0^2 y^2(x) dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \frac{16\pi}{15} \text{ (куб. ед.)}.$$

б) Применяя формулу (5), получим

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot y(x) dx = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = \frac{8\pi}{3} \text{ (куб. ед.)}.$$

Рис. 145: Кривые $y = |x|$ и $y = x^2$

625. По формуле (1) имеем

$$V_x = \pi \int_{-a}^a y^2(x) dx = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi a b^2 \text{ (куб. ед.)}.$$

626. По формуле (1) имеем

$$V_x = \pi \int_0^a y^2(x) dx = \frac{\pi b^2}{a^{4/3}} \int_0^a x^{4/3} dx = \frac{3}{7} \pi a^{-4/3} b^2 \cdot x^{7/3} \Big|_0^a = \frac{3}{7} \pi a b^2 \text{ (куб. ед.)}.$$

627. Сделайте чертёж. *1-й способ.* Перейдём к обратным функциям ($y = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$; $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$) и воспользуемся формулой (4), разбивая интеграл в сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy + \pi \int_1^2 \left(\sqrt{\frac{2}{y} - 1} \right)^2 dy = \\ &= \pi \int_0^1 y dy + \pi \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - 1 \right) dy = \dots = \pi \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

2-й способ: ещё проще – воспользоваться формулой (5):

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot (y_2(x) - y_1(x)) dx = 2\pi \int_0^1 x \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \right) dx.$$

628. Поскольку $\sin x \geq 0$ при $2\pi k \leq x \leq (2k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то

$$V_x = \pi \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-2x} \sin x dx.$$

Сделаем в каждом из интегралов замену $t = x - 2\pi k$, тогда

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-4\pi k} \cdot \int_0^\pi e^{-2t} \sin t dt = \\ &= \pi \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-4\pi k} \cdot \frac{e^{-2t}}{5} (\cos t + 2 \sin t) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{5} (1 + e^{-2\pi}) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-4\pi k} = \end{aligned}$$

(используя формулу суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $e^{-4\pi}$)

$$= \frac{\pi}{5} \cdot \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-4\pi}} = \frac{\pi}{5(1 - e^{-2\pi})} \text{ (куб. ед.)}.$$

629. Сделаем чертёж (Рис. 119). Вычислим точки пересечения кривых: $(1, 2)$ и $(4, 5)$.

1-й способ. Найдём обратные функции ($y = 3 \pm \sqrt{x} \Rightarrow x = (y - 3)^2$, $y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$) и воспользуемся формулой (2.а), это – наиболее оптимальный способ:

$$V_y = \pi \int_2^5 ((y - 1)^2 - ((y - 3)^2)^2) dy = \dots = \frac{72\pi}{5} \text{ (куб. ед.)}.$$

2-й способ. В этом случае объём выписывается с помощью двух интегралов по формуле (5):

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^1 x((3 + \sqrt{x}) - (3 - \sqrt{x})) dx + 2\pi \int_1^4 x((3 + \sqrt{x}) - (x + 1)) dx = \\ &= 4\pi \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx + 2\pi \int_1^4 (2x + x^{\frac{3}{2}} - x^2) dx = \dots = \frac{72\pi}{5} = 14,4 \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

630. Сделайте чертёж. С вычислительной точки зрения (простоты получаемого интеграла) может оказаться удобнее перейти к обратным функциям ($y = -\ln x \Rightarrow x = e^{-y}$) и воспользоваться формулой (2.а):

$$V_y = \pi \int_{-\ln 2}^0 (2^2 - (e^{-y})^2) dy = \dots = \frac{\pi(8 \ln 2 - 3)}{2} \text{ (куб. ед.)}.$$

631. По формуле (3) имеем

$$V_x = -\pi \int_{T_0}^T y^2(t) x'(t) dt = -\pi \int_3^2 (\sqrt{2t + 3})^2 (\ln t)' dt =$$

$$= \pi \int_2^3 \frac{2t+3}{t} dt = \pi(2t + 3 \ln |t|) \Big|_2^3 = \left(2 + 3 \ln \frac{3}{2}\right) \pi \text{ (куб. ед.)}.$$

632. По формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} V_x &= -\pi \int_{T_0}^T y^2(t)x'(t)dt = -\pi \int_1^0 (t-t^3)^2(t^2)'dt = \pi \int_0^1 (t^2-2t^4+t^6) \cdot 2tdt = \\ &= 2\pi \int_0^1 (t^3-2t^5+t^7)dt = 2\pi \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{8}\right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12} \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

633. По формуле (3) имеем:

$$\begin{aligned} V_x &= -\pi \int_{T_0}^T y^2(t)x'(t)dt = -\pi \int_0^\pi (\sin^3 t)^2 \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t)dt = \\ &= -3\pi \int_0^\pi (1-\cos^2 t)^3 \cdot \cos^2 t d(\cos t) = \\ &= -3\pi \left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3\cos^5 t}{5} + \frac{3\cos^7 t}{7} - \frac{\cos^9 t}{9}\right) \Big|_0^\pi = \frac{64\pi}{105} \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

634. а) По формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} V_x &= -\pi \int_{2\pi}^0 y^2(t)x'(t)dt = \pi \int_0^{2\pi} (a(1-\cos t))^2 \cdot a(1-\cos t)dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1-3\cos t+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)-\cos^3 t\right)dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2}-3\cos t+\cos 2t-\cos^3 t\right)dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \frac{5}{2}dt = 5\pi^2 a^3 \text{ (куб. ед.)}, \end{aligned}$$

так как интегралы от $-3\cos t$, $\cos 2t$, $-\cos^3 t$ равны нулю из-за равенства нулю интегралов от косинуса (синуса) на их периодах.

б) По формуле (5), переходя под знаком интеграла к переменной t , имеем

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_a^b xy(x)dx = -2\pi \int_{T_1}^{T_0} x(t)y(t)x'(t)dt = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t-\sin t) \cdot (a(1-\cos t)) \cdot (a(1-\cos t))dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = \\
&= 2\pi a^3 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}t - 2t \cos t + \frac{t}{2} \cos 2t - \frac{3}{2} \sin t + \sin 2t - \frac{1}{2} \sin t \cos 2t \right) dt = \\
&= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}t dt = 6\pi^3 a^3 \text{ (куб. ед.)},
\end{aligned}$$

так как остальные интегралы обращаются в нуль (в силу того, что интегралы от синуса и косинуса по периоду равны нулю).

в) Перейдём к новой системе координат $y_1 = y - 2a$, $x_1 = x$, тогда вращение кривой $y(x)$ вокруг $y = 2a$ равнозначено вращению кривой $y_1 = y(x) - 2a$ вокруг оси Ox . Поэтому искомый объём равен

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{2\pi} ((2a)^2 - (2a - y(x))^2) dx = \pi \int_0^{2\pi} ((2a)^2 - (2a - y(t))^2) \cdot x'(t) dt = \\
&= \pi \int_0^{2\pi} ((2a)^2 - (2a - a(1 - \cos t))^2) \cdot a(1 - \cos t) dt = \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (4 - (1 + \cos t))^2 \cdot (1 - \cos t) dt = \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(3 - 2 \cos t - \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) \cdot (1 - \cos t) dt = \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - 2 \cos t - \frac{\cos 2t}{2} - 3 \cos t + (1 + \cos 2t) + \frac{1}{2} \cos 2t \cos t \right) dt = \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{2} + \dots \right) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \frac{7}{2} dt = 7\pi^2 a^3 \text{ (куб. ед.)},
\end{aligned}$$

так как остальные интегралы обращаются в нуль (в силу того, что интегралы от синуса и косинуса по периоду равны нулю).

635. Поскольку $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, а также $x(2) = 0$, $y(2) = 0$, то $(0, 0)$ – точка самопересечения и, соответственно, петле соответствует изменение параметра $0 \leq t \leq 2$. При возрастании t от 0 до 1 значение x также увеличивается от 0 до 1, а при дальнейшем возрастании t от 1 до 2 величина x убывает 1 до 0.

а) По формуле (3) имеем

$$\begin{aligned}
V_x &= \pi \int_2^1 y^2(t) x'(t) dt - \pi \int_0^1 y^2(t) x'(t) dt = -\pi \int_0^2 y^2(t) x'(t) dt = \\
&= -\pi \int_0^2 (4t - t^3)^2 (2 - 2t) dt = 2\pi \int_0^2 (16t^2 - 8t^4 + t^6) (t - 1) dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^2 (t^7 - t^6 - 8t^5 + 8t^4 + 16t^3 - 16t^2) dt = \\
&= 2\pi \left(\frac{t^8}{8} - \frac{t^7}{7} - \frac{4}{3}t^6 + \frac{8}{5}t^5 + 4t^4 - \frac{16}{3}t^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{64}{35}\pi \text{ (куб. ед.)}
\end{aligned}$$

б) Здесь можно воспользоваться формулой (2), но мы рассмотрим решение с помощью формулы (5):

$$\begin{aligned}
V_y &= 2\pi \int_2^1 x(t)y(x(t))d(x(t)) - 2\pi \int_0^1 x(t)y(x(t))d(x(t)) = \\
&= -2\pi \int_0^2 (2t - t^2)(4t - t^3) \cdot 2(1 - t)dt = 4\pi \int_0^2 (t^6 - 3t^5 - 2t^4 + 12t^3 - 8t^2)dt = \\
&= 4\pi \left(\frac{2^7}{7} - 2^5 - \frac{2^6}{5} + 3 \cdot 2^4 - \frac{2^6}{3} \right) = \frac{64\pi}{105} \text{ (куб. ед.)}
\end{aligned}$$

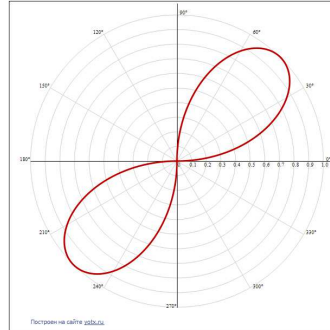
636. Эта кривая – верхняя половина окружности $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, поэтому ожидаемый объём равен объёму единичного шара, т. е. $\frac{4\pi}{3}$. Получим этот результат. В самом деле, по формуле (7) имеем

$$\begin{aligned}
V_p &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = -\frac{16\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d(\cos \varphi) = \\
&= -\frac{4\pi}{3} \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3} \text{ (куб. ед.)}
\end{aligned}$$

637. Построив кривую (Рис. 146) с учётом $r \geq 0$, видим, что объём тела, полученного при вращении вокруг полярной оси всей кривой, равен удвоенному объёму тела, полученного при вращении дуги от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Тогда по формуле (7) имеем

$$\begin{aligned}
V_p &= \frac{2\pi}{3} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin 2\varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = \\
&= \frac{32\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \\
&= \frac{32\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{64}{105}\pi a^3 \text{ (куб. ед.)}.
\end{aligned}$$

638. Используя равносильные преобразования, преобразуем уравнение, разрешив его относительно r : $\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{r}{a} \Leftrightarrow r = a \sin 2\varphi$, где $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

Рис. 146: Кривая $r = a \sin 2\varphi$.

и далее решаем как предыдущую задачу. Это решение в данном случае проще, чем по формуле (8).

639. Рассмотрим сечения пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте. Проведём некоторое произвольное сечение. В сечении получается многоугольник, подобный n -угольнику в основании. Рассмотрим отсекаемую пирамиду высоты x ($0 < x \leq H$), обозначим величину площади её основания через $S(x)$. Найдём $S(x)$. Так как эта пирамида подобна исходной пирамиде, а площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, то справедлива пропорция: $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{H^2}$, откуда находим площадь поперечного сечения $S(x) = \frac{S}{H^2}x^2$. Тогда по формуле (11) имеем:

$$V = \int_0^H S(x)dx = \frac{S}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}SH.$$

640. В сечении данного тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox , получаем эллипс

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1,$$

площадь которого выражается функцией $S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, $-a \leq x \leq a$. Тогда по формуле (9) имеем

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S(x)dx = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \\ &= \pi bc \int_{-a}^a dx - \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a x^2 dx = \dots = \frac{4}{3}\pi abc \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

641. Сделайте в удобном ракурсе рисунок (он может получиться не сразу, но постарайтесь). Заметим, что тело состоит из двух равновеликих по объёму частей. Одна из них находится в верхнем полупространстве $z \geq 0$, а вторая расположена симметрично в полупространстве $z < 0$.

Вычислим объём верхней половины тела. Она ограничена снизу плоскостью $z = 0$, сверху – плоскостью $z = \frac{c}{a} \cdot x$, с боков – вертикальной цилиндрической поверхностью, проходящей по границе эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Рассмотрим сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $(x, 0, 0)$, где $0 \leq x \leq a$. В сечении получим прямоугольник с основанием $2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ и высотой $\frac{c}{a} \cdot x$, тогда площадь $S(x)$ этого прямоугольника равна

$$S(x) = 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{c}{a} \cdot x = \frac{2bcx}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

откуда, интегрируя, находим

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_0^a S(x)dx = \frac{2bc}{a} \int_0^a x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \\ &= -abc \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} d\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{2}{3}abc \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

642. Рассмотрим $\frac{1}{8}$ часть тела, расположенную в I октанте (сделайте рисунок). Найдём сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Oz при некотором фиксированном z ($0 \leq z \leq a$). Это будет квадрат, т. к. $x^2 = a^2 - z^2 = y^2$. Отсюда $x = y = \sqrt{a^2 - z^2}$, тогда площадь сечения равна

$$S(z) = xy = \sqrt{a^2 - z^2} \cdot \sqrt{a^2 - z^2} = a^2 - z^2.$$

Искомый объём тела находится по формуле

$$V = 8 \int_0^a (a^2 - z^2)dz = 8 \left(a^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{16}{3}a^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

643. По формуле (13) имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{пов.,X}} &= 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = 2\pi \int_0^\pi |\sin x| \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \\ &= 2\pi \left(-\frac{\cos x}{2} \sqrt{1 + \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}) \right) \Big|_0^\pi = 2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})). \end{aligned}$$

644. Запишем отрезки AB и BC в параметрическом виде:

$$AB : x = 1, y = t, \text{ где } 2 \leq t \leq 5, \quad BC : x = t, y = 2, \text{ где } 1 \leq t \leq 6.$$

По формуле (12) имеем

$$S_{\text{пов.,x}} = S_{AB} + S_{BC} = 2\pi \int_2^5 t \cdot \sqrt{0^2 + 1^2} dt + 2\pi \int_1^6 2 \cdot \sqrt{1^2 + 0^2} dt = 41\pi.$$

645. 1) Объём тела вычислим по формуле

$$V_x = \pi \int_0^H y^2(x) dx = \pi \int_0^H 2px dx = \pi p H^2 \text{ (куб. ед.)}.$$

2) Вычислим боковую поверхность параболоида:

$$\begin{aligned} S_{\text{пов.,x}} &= 2\pi \int_0^H \sqrt{2px} \cdot \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = \\ &= 2\pi \int_0^H \sqrt{2px + p^2} dx = \frac{4\pi\sqrt{2p}}{3} \left(\left(H + \frac{p}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

646. Ясно, что уравнение $y = 3 + \sqrt{1 - x^2}$ задаёт верхнюю полуокружность, а уравнение $y = 3 - \sqrt{1 - x^2}$ — нижнюю полуокружность. Когда окружность вращается вокруг оси абсцисс, она образует поверхность «бублика». Заметим, что если вращать круг, ограниченный окружностью, то получится геометрическое тело, т. е. сам тор. Сейчас нам нужно найти площадь его поверхности, которая равна сумме площадей поверхностей, образованных вращением вокруг оси абсцисс верхней и нижней полуокружностей.

1) Найдём площадь поверхности, которая получается вращением верхней полуокружности вокруг оси абсцисс:

$$\begin{aligned} S_{1,\text{пов.,x}} &= 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \left(3 + \sqrt{1 - x^2} \right) \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \left(3 + \sqrt{1 - x^2} \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 2 \cdot 2\pi \int_0^1 \left(\frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} + 1 \right) dx = \\ &= 4\pi (3 \arcsin x + x) \Big|_0^1 = 6\pi^2 + 4\pi \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

2) Найдём теперь площадь поверхности, которая получается вращением нижней полуокружности вокруг оси абсцисс. Аналогично действуя, получаем

$$\begin{aligned} S_{2,\text{пов.},x} &= 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \left(3 - \sqrt{1 - x^2}\right) \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2} dx = \\ &= 2 \cdot 2\pi \int_0^1 \left(\frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} - 1\right) dx = 4\pi(3 \arcsin x - x) \Big|_0^1 = 6\pi^2 - 4\pi \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

3) Таким образом, площадь полной поверхности тора:

$$S_{\text{пов.},x} = S_{1,\text{пов.},x} + S_{2,\text{пов.},x} = 12\pi^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

647. а) Согласно формуле (12) имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{пов.},x} &= 2\pi \int_{T_0}^{T_1} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t)) \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \\ &= -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = \frac{64\pi a^2}{3} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

б) По формуле (12), в которой x заменяем на y и наоборот, получим

$$\begin{aligned} S_{\text{пов.},y} &= 2\pi \int_{T_0}^T |x(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= 4\pi a \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \left| \text{замена } z = \frac{t}{2} \right| \\ &= 8\pi a^2 \int_0^\pi (2z - \sin 2z) \sin z dz = 8\pi a^2 (2 \int_0^\pi z \sin z dz - 2 \int_0^\pi \sin^2 z \cos z dz) = \\ &= 8\pi a^2 (2(z \cos z) \Big|_\pi^0 + \int_0^\pi \cos z dz - 2 \int_0^\pi \sin^2 z d(\sin z)) = 16\pi^2 a^2 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

в) Переходя к новым координатам $x_1 = x$, $y_1 = y - 2a$ (вращение кривой $y(x)$ вокруг $y = 2a$ равнозначно вращению кривой $y_1(x) = y(x) - 2a$ вокруг

оси Ox_1) и учитывая симметрию точек кривой относительно прямой $x_1 = \pi a$, а также то, что $y_1 \leq 0$, имеем:

$$\begin{aligned} S_{\text{пов.}} &= 4\pi \int_0^\pi |y_1(t)| \sqrt{(x'_1(t))^2 + (y'_1(t))^2} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^\pi |-\cos t - 1| \sin \frac{t}{2} dt = 16\pi a^2 \int_0^\pi \cos^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 32\pi a^2 \int_\pi^0 \cos^2 \frac{t}{2} d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = \frac{32}{3}\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

648. Параметрические уравнения астроида имеют вид: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Достаточно удвоить площадь поверхности, описанной дугой астроида, лежащей в I квадранте ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$):

$$\begin{aligned} S_{\text{пов.}} &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin^3 t) \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \sin t dt = 12\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

649. Введём декартову систему координат так, что её начало совпадает с центром окружности, ось Ox параллельна хорде AB , и пусть хорда AB лежит в верхней полуплоскости (сделайте рисунок). Запишем уравнение окружности в параметрическом виде: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, где $t \in [0, 2\pi)$. Тогда точка B соответствует значению $T_0 = \arcsin \frac{b}{a}$, точка A — значению $T = \pi - T_0$. Имеем:

$$\Gamma_1 : x = a \cos t, y = a \sin t, \text{ где } t \in [T_0, T],$$

$$\Gamma_2 : x = a \cos t, y = a \sin t, \text{ где } t \in [T, 2\pi + T_0],$$

и воспользуемся формулой $S_{\text{пов.}} = 2\pi \int_{T_0}^T \rho(t) dl$, где $\rho(t)$ — расстояние от точки кривой до оси вращения.

Для Γ_1 : $\rho(t) = y - b = a \sin t - b$, $dl = \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt = a dt$, поэтому

$$S_{1, \text{пов.}} = 2\pi \int_{T_0}^{\pi - T_0} (a \sin t - b) a dt = \dots = 4\pi a \sqrt{a^2 - b^2} - 2\pi^2 ab + 4\pi ab \arcsin \frac{b}{a}.$$

Для Γ_2 : $\rho(t) = b - y = b - a \sin t$, $dl = a dt$, поэтому

$$S_{2, \text{пов.}} = 2\pi \int_{\pi - T_0}^{2\pi + T_0} (b - a \sin t) a dt = \dots = 2\pi^2 ab + 4\pi ab \arcsin \frac{b}{a} + 4\pi a \sqrt{a^2 - b^2}.$$

650. Из условия задачи следует, что $\Gamma : y = 3x - x^3$, где $0 \leq x \leq \sqrt{2}$. Тогда в формуле $S_{\text{пов.}} = 2\pi \int_{T_0}^T \rho(t) dl$, где $\rho(t)$ – расстояние от точки кривой до оси вращения, имеем: $dl = \sqrt{1 + 9(1 - x^2)^2} dx$, $\rho(x) = \frac{|3x - x^3 - x|}{\sqrt{2}} = \frac{2x - x^3}{\sqrt{2}}$ и получаем

$$\begin{aligned} S_{\text{пов.}} &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x - x^3}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 9(1 - x^2)^2} dx = \left| t = 1 - x^2 \right| = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 9t^2} \cdot (1 + t) dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1 + 9t^2} dt + \int_{-1}^1 t\sqrt{1 + 9t^2} dt \right) = \\ &= \sqrt{2}\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 9t^2} dt = \dots = \sqrt{5}\pi + \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \ln(3 + \sqrt{10}) \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

651. Имеем в полярных координатах:

$$\begin{aligned} S_{\text{пов.}} &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \varphi \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{(a(1 + \cos \varphi))^2 + (-a \sin \varphi)^2} d\varphi = \\ &= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{32}{5}\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

652. По формуле (14) имеем:

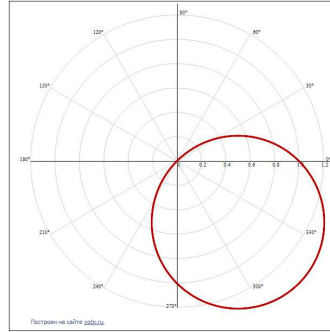
$$\begin{aligned} S_{\text{пов., ОР}} &= 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \sin \varphi \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \\ &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{2} \sin \varphi \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (0)^2} d\varphi = 4\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin \varphi d\varphi = \dots = 2\pi (1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

653. Найдём область определения лемнискаты из условия $\cos 2\varphi \geq 0$, откуда при $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ получаем пределы для правой ветви кривой. В силу симметрии кривой относительно полярной оси, для половины искомой площади пределы интегрирования будут $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Вычислим

$$\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \sqrt{\left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 + \left(\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2} d\varphi = \frac{ad\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Теперь находим площадь поверхности вращения:

$$\frac{1}{2} S_{\text{пов., ОР}} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \sin \varphi \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi =$$

Рис. 147: Кривая $r = \cos \varphi - \sin \varphi$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \pi a^2 (2 - \sqrt{2}) \text{ (кв. ед.)}.$$

654. Покажем, что данная кривая является окружностью. Преобразуем её уравнение к виду $r = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \varphi)$. Найдём область определения: $r \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in [-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$. В силу периодичности с периодом 2π достаточно построить кривую на отрезке $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Построим кривую за несколько шагов:

$$r = \sin \varphi \Rightarrow r = -\sin \varphi \Rightarrow r = -\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow r = -\sqrt{2} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь первый шаг (умножение на (-1)) приводит к симметрии окружности (радиуса $\frac{1}{2}$) из верхней полуплоскости в нижнюю относительно полярной оси. Второй шаг – поворот против часовой стрелки вокруг полюса на угол $\frac{\pi}{4}$. Третий шаг – растяжение от полюса в $\sqrt{2}$ раз (радиус стал равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$). Кривая изображена на Рис. 147.

Поскольку окружность симметрична относительно луча $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (её центр лежит на этом луче), то при вращении получается поверхность в виде сферы радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$, площадь которой вычисляется по формуле $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 2\pi$ (кв. ед.).

655. Перейдём в совмещённую декартову систему координат. Для этого перепишем уравнения в виде:

$$r = \frac{1}{\cos \varphi - \sin \varphi} \quad \text{и} \quad r = \frac{15}{\sin \varphi + 3 \cos \varphi},$$

откуда, умножая на знаменатели и используя формулы перехода $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, находим уравнения кривых:

$$y = x - 1 \quad \text{и} \quad y = -3x + 15.$$

Тогда $A(1, 0)$, $B(4, 3)$, $C(5, 0)$ и площадь поверхности находится по формуле

(13):

$$\begin{aligned} S_{\text{пов.,X}} &= 2\pi \int_1^4 (x-1)\sqrt{1+1^2} dx + 2\pi \int_4^5 (-3x+15)\sqrt{1+(-3)^2} dx = \\ &= 2\sqrt{2}\pi \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^4 + 2\sqrt{10}\pi \left(15x - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_4^5 = \\ &= 2\sqrt{2}\pi \cdot \frac{9}{2} + 2\sqrt{10}\pi \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{2}\pi(9 + 3\sqrt{5}) \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

656. Найдём площадь трапеции (сделайте чертёж):

$$S = \int_0^1 \sqrt{2px} dx = \sqrt{2p} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3},$$

тогда координаты центра тяжести

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{S} \int_0^1 xy dx = \frac{1}{S} \int_0^1 x\sqrt{2px} dx = \frac{3}{5}, \\ y_c &= \frac{1}{2S} \int_0^1 y^2 dx = \frac{1}{2S} \int_0^1 2px dx = \frac{3}{8}\sqrt{2p}. \end{aligned}$$

657. Прямая $y = 2x/\pi$ и синусоида $y = \sin x$ пересекаются в точках $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$ (сделайте рисунок). Площадь фигуры, ограниченной этими линиями, равна

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx = \frac{4 - \pi}{4}.$$

Тогда для координат центра тяжести получаем

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx = \frac{4}{4 - \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx = \frac{12 - \pi^2}{12 - 3\pi}, \\ y_c &= \frac{1}{2S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi^2}x^2 \right) dx = \frac{\pi}{6(4 - \pi)}. \end{aligned}$$

658. Так как центр тяжести прямоугольника лежит на пересечении диагоналей, то его расстояние до оси равно половине диагонали, т. е. при ширине прямоугольника, равной 6, и длине, равной 8, половина диагонали равна 5. Тогда объём тела

$$V = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 = 480\pi \text{ (куб. ед.)}.$$

659. Объём тела, полученного от вращения фигуры вокруг оси Ox , равен

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi a} y^2(x) dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

Площадь фигуры равна

$$S = \int_0^{2\pi a} y(x)dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Пусть y_c – ордината центра тяжести. Согласно второй теореме Гульдена, $S \cdot 2\pi y_c = V_x$, откуда $y_c = \frac{5a}{6}$. Из симметрии фигуры относительно прямой $x = \pi a$ следует, что абсцисса центра тяжести $x_c = \pi a$.

660. Если вращать круг вокруг оси Ox , то центр тяжести круга находится от оси вращения на расстоянии b , а поэтому площадь поверхности найдём по первой теореме Гульдена:

$$S_x = 2\pi r \cdot 2\pi b = 4\pi^2 br \text{ (кв. ед.)},$$

объём – по второй теореме Гульдена:

$$V_x = \pi r^2 \cdot 2\pi b = 2\pi^2 br^2 \text{ (куб. ед.)}.$$

Если вращение производить вокруг оси Oy , то расстояние от центра тяжести круга до оси Oy будет равно a . Тогда

$$S_y = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar \text{ (кв. ед.)},$$

$$V_y = \pi r^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 ar^2 \text{ (куб. ед.)}.$$

16 Варианты заданий для самопроверки, подготовки к контрольным работам

*«Сначала учите науку программирования и всю теорию.
Далее выработайте свой программистский стиль.
Затем забудьте всё и просто программируйте».*
George Carrette.

При подготовке к предстоящей контрольной работе выделите достаточное время для *повторения* решений основных типов задач, изучаемых в текущем семестре. Запомните приёмы и методы решений.

Выполните варианты заданий каждое в течение не более 1,5 часов, никуда не подсматривая, полностью самостоятельно. Поставьте себе оценки согласно критериям:

$+$, если задача решена полностью верно (приведены необходимые обоснования, ход решения и ответ верные);

$\pm$, если задача в целом решена верно, но в решении присутствует *очень небольшая* погрешность, не влияющая на общий алгоритм решения;

$+/-$, если имеем промежуточный вариант между соседними случаями (задача, большей частью, решена, но есть довольно существенные погрешности в решении);

$\mp$, если в решении допущена грубая ошибка (в том числе арифметическая), влияющая на ход решения, но, тем не менее, есть небольшое продвижение в решении;

$-$, если допущено более одной грубой ошибки, много мелких ошибок, недостаточное обоснование, незнание определений и формулировок используемых теорем, видно непонимание подходов к решению данного типа задач.

Выставьте себе примерную оценку (помните, что более точно ваши знания может оценить только ваш преподаватель):

- 5–6 задач с оценками $+$ и $\pm$ (оценка 5);
- 4 задачи с оценками $+$ и $\pm$ (оценка 4);
- 3 задачи с оценками $+$ и $\pm$ (оценка 3);
- всё остальное неудовлетворительно (решено менее половины предложенных в варианте задач).

Проанализируйте свои ошибки, старайтесь в дальнейшем их не допускать.

P.S. Решения задач разобраны в пособии.

16.1 ВАРИАНТ № 1

1	2	3	4	5	6

1. Исследуйте кривую, заданную явно в декартовых координатах, и постройте её график:

$$y = \operatorname{arctg} x - 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Исследуйте и постройте кривую, заданную в декартовых координатах параметрически:

$$x = \frac{1}{t-2}, \quad y = \frac{t}{t-1}.$$

3. Используя теоремы о среднем, вычислите предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\cos(\operatorname{arctg}(e^x))}{x} dx$$

(приведите формулировку используемой теоремы).

4. Приведите определение сходящегося (расходящегося) интеграла. Исследуйте сходимость интеграла

$$\int_0^1 x^q \left(\frac{1}{x - \frac{x^3}{6}} - \frac{1}{\sin x} \right) dx.$$

5. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной в полярных координатах кривой

$$r = \sqrt{3} + 2 \cos 2\varphi.$$

6. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линией

$$x(t) = \ln t, \quad y(t) = \sqrt{2t+3}, \quad \text{если } t \in [2, 3].$$

16.2 ВАРИАНТ № 2

1	2	3	4	5	6

1. Как определяется вертикальная асимптота у графика функции? Наклонная асимптота? Найдите асимптоты графика функции

$$y = \left| -2 \cdot \frac{x^2}{|x| - 1} + x - \frac{1}{|x|} \right|.$$

2. Исследуйте кривую в полярной системе координат и постройте её:

$$r = 2 + \frac{1}{\varphi}, \quad \text{где } \varphi > 0.$$

3. Пользуясь 2-ой теоремой о среднем, оцените значение интеграла

$$\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \cdot \sin x \, dx \quad (\alpha \geq 0, 0 < a < b)$$

(приведите формулировку теоремы).

4. Приведите определение сходящегося (расходящегося) несобственного интеграла. Исследуйте сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt[3]{x^5}} dx.$$

5. Сформулируйте понятия абсолютной (условной) сходимости несобственного интеграла. Исследуйте на абсолютную (условную) сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(e^x)}{\sqrt{\ln(x+1)}} dx.$$

6. Найдите длину дуги пространственной кривой, заданной в декартовых координатах параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 2t, \end{cases} \quad \text{где } t \in [0, 2\pi].$$

16.3 ВАРИАНТ № 3

1	2	3	4	5	6

1. Исследуйте плоскую кривую, заданную в декартовой системе координат параметрически, и постройте её:

$$\begin{cases} x = t + e^{-t}, \\ y = 2t + e^{-2t}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Имеются ли асимптоты у плоской кривой, заданной явно в полярной системе координат уравнением

$$r = \frac{3}{2 - \cos \varphi}.$$

Если нет, объясните, почему. Если да, то найдите их.

3. Докажите интегральное неравенство

$$\int_0^{200} \frac{e^{-5x}}{x+20} dx < \frac{1}{100}.$$

4. Используя признаки Дирихле или Абеля, исследуйте сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\sqrt{x} \cdot \ln(x^2 + 2)} dx.$$

Приведите формулировку используемого признака.

5. Приведите определения абсолютной (условной) сходимости несобственного интеграла. Исследуйте на абсолютную (условную) сходимость интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^p \cdot \sin x}{\ln x} dx.$$

6. Вычислите площадь петли кривой

$$y^2 = x(x-1)^2.$$

16.4 ВАРИАНТ № 4

1	2	3	4	5	6

1. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{2}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

возрастает в точке $x = 0$, но не является возрастающей ни в каком интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку, где $\varepsilon > 0$ – произвольное число.

2. Пусть f и g – дважды дифференцируемые функции. Докажите, что если f – выпукла вниз и возрастает, а g – выпукла вниз, то сложная функция $y = f(g(x))$ – выпукла вниз.

3. Исследуйте и постройте кривую

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Вычислите $\frac{d}{d(x^3)} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt$.

5. Вычислите определённый интеграл $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

6. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t, \\ y(t) = t + 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad x = y.$$

16.5 ВАРИАНТ № 5

1	2	3	4	5	6

1. Сформулируйте понятие локального экстремума. Имеет ли функция локальный экстремум в точке $x = 0$, и если да, то какой именно

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-\frac{1}{x^2}} \left(2 + \cos \frac{1}{x^2} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0? \end{cases}$$

2. Исследуйте и постройте кривую, заданную полярным уравнением

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, \quad (a > 0).$$

3. Найдите наклонные асимптоты у графика функции

$$y = \sqrt[3]{(1-x)(x+2)^2},$$

используя разложение функции по формуле Тейлора при $x \rightarrow \pm\infty$.

4. Найдите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x}$.

5. Используя в окрестности особой точки разложения по формуле Тейлора, исследуйте сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}{x^p} dx.$$

6. Исследуйте абсолютную (условную) сходимость интеграла

$$\int_1^2 \frac{\cos \frac{1}{2-x}}{(2-x)^2} dx.$$

16.6 ВАРИАНТ № 6

1	2	3	4	5	6

1. Исследуйте и постройте кривую, заданную параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = 4 \cos t + 3 \sin t, \\ y = 3 \cos t - 4 \sin t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Представьте, если можно, функцию

$$f(x) = \frac{2^x + x}{\sin x}$$

в виде суммы чётной и нечётной функций.

3. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin \frac{\pi}{x}), & \text{если } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет бесконечно много точек разрыва, но, тем не менее, интегрируема в собственном смысле на сегменте $[0, 1]$.

4. Привлекая неравенство Коши–Буняковского, докажите неравенство

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^x dx < \sqrt{e - 1}.$$

5. Используя признак Абеля, исследуйте сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\sqrt{x} \cdot \ln(x^2 + 2)} dx.$$

6. Найдите длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad \text{где } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Предметный указатель

- Абсолютная (условная) сходимос-
ть, 364
- Асимптоты графиков
 криволинейные, 123
 в декартовых координатах, 115
 в полярных координатах, 120
- Астроида, 127, 142, 154, 169, 399
- Бета-функция (Эйлера), 334
- Вычисление предела последователь-
ности как предела интеграль-
ной суммы, 240
- Выпуклые функции
 достаточные условия, 61
 неравенство Йенсена, 55
 определение, 54
 свойства, 59
 точки перегиба, 62
- Гамма-функция (Эйлера), 334
- Гипербола, 30, 107
- Гиперболическая спираль, 196
- Гиперболоид однополостный, 452
- Декартов лист, 40, 90, 166, 401
- Дифференциал дуги, 429, 430
- Дирихле функция, 99
- Длина дуги кривой:
 определение, 425
 пространственной кривой, 431
 в декартовой системе координат,
 428
 в полярной системе координат, 432
 заданной параметрически, 430
 заданной явно, 429
- Замена переменной, 236, 299
- Интеграл
 Дирихле, 334
 Эйлера, 333
 Эйлера–Пуассона, 334
 Френеля, 333
- Фруллани, 335
- Лапласа, 334
- Раабе, 335
- Интегралы с переменными пределами,
 216
- Интегральные неравенства, 269
- Интегральный синус, косинус, 333
- Интегрирование по частям, 239, 300
- Известные плоские кривые:
 астроида, 127, 399, 435, 462, 463
 цепная линия, 434
 циклоида, 399, 434, 462, 464
 декартов лист, 127, 401, 414
 эллипс, 399, 461
 кардиоида, 435, 456, 459, 464
 кривая Пеано, 426
 лемниската Бернулли, 400, 464
 логарифмическая спираль, 435
 локон Аньези, 169, 400, 434
 полукубическая парабола, 429
 снежинка Коха, 426
 спираль Архимеда, 401, 435
 трилистник, 401
 трохоида, 133
 улитка Паскаля, 401
- Известные пространственные кривые:
 кривая Вивиани, 424
 винтовая линия, 134, 423, 435
- Канторова лестница, 19, 212
- Кардиоида, 40, 104, 191, 196
- Координаты центра тяжести, 458, 460
- Коши теорема, 48
- Краевые экстремумы
 достаточное условие, 89
- Критерий Коши сходимости несоб-
ственных интегралов, 335
- Кривая поверхность:
 бутылка Клейна, 465

- эллипсоид вращения, 449
- геликоид, 135
- квадрируемость, 454
- лента Мёбиуса, 465
- однополостный гиперболоид, 452
- определение, 453
- площадь, 454
- сфероид, 449
- Кривая:
 - алгебраическая, 427
 - дифференциал дуги, 429
 - гладкая, 427
 - кусочно гладкая, 427
 - неспряmlяемая, 425
 - параметризуемая, 420
 - плоская, 420
 - простая, 420
 - пространственная, 420
 - спряmlяемая, 424
 - замкнутая, 420
- Кубируемость, 446
- Кусочно-непрерывная функция, 213, 217
- Квадрируемость
 - необходимые и достаточные условия, 387
 - определение, 386
- Лемниската Бернулли, 31, 106, 196, 400
- Локальные экстремумы, 85
 - достаточные условия, 87
 - необходимое условие, 87
 - в полярных координатах, 92
- Локон Аньези, 400
- Масса плоской кривой, 458
- Монотонные функции
 - достаточные условия, 21
 - определение, 13
 - свойства, 17
 - в декартовых координатах, 13
 - в полярных координатах, 26
- в точке, 20
- Наименьшее, наибольшее значения функции, 82
- Неквадрируемая фигура, 403
- Неравенство:
 - Бернулли, 68
 - Чебышёва, 271
 - Гёльдера, 69, 271
 - Йенсена, 55
 - Йенсена, интегральный аналог, 69
 - Йенсена, обобщённое, 57
 - Йенсена, применение, 66, 73
 - Коши, 66, 271
 - Коши, обобщённое, 67
 - Коши-Буняковского, 67, 271
 - между арифметическим и гармоническим средними, 68
 - Минковского, 271
- Несобственный интеграл:
 - главное значение, 343
 - определение, 291
 - свойства, 295
- Невозрастающие функции, 14
- Неявное задание кривой, 25
- Объём и площадь поповерхности тела вращения, 445
- Объём тел с известной площадью поперечных сечений, 452
- Объём тел вращения:
 - в декартовой системе координат, 447
 - в полярной системе координат, 450
- Объём тела:
 - кубируемость, 446
 - определение, 446
 - с известной площадью поперечных сечений, 452
 - вычисление, 447
- Ограниченные функции, 81
- Определённый интеграл Римана
 - единственность, 210

-
- интегрирование по частям, 239
 - классы интегрируемых функций, 212
 - критерий интегрируемости, 211
 - критерий Лебега, 214
 - необходимое условие интегрируемости, 212
 - определение, 208
 - суммы Дарбу, 211
 - свойства, 215
 - замена переменной, 236
 - Осевая и центральная симметрия, 124
 - Оси и центры симметрии кривых, 123
 - Особые точки кривых, 136, 427
 - Парабола, 30, 108
 - Параметрическое задание кривой, 24
 - Перегиба точки, 62
 - Периодические функции
 - определение, 48
 - в декартовых координатах, 131
 - в полярных координатах, 135
 - Площадь плоской фигуры:
 - аксиомы, 385
 - определение, 385, 386
 - в декартовой системе координат, 388
 - в полярной системе координат, 393
 - Площадь поверхности вращения:
 - в декартовых координатах, 454
 - в полярных координатах, 456
 - Полукубическая парабола, 429
 - Полярная система координат
 - монотонность, 32
 - основные понятия, 26, 190
 - Построение графиков кривых
 - в декартовых координатах, 159
 - в полярных координатах, 190
 - Признак Абеля, 341
 - Признак Дирихле, 336
 - Признаки сравнения, 304
 - Регулярная точка кривой, 427
 - Сфероид, 449
 - Симметрия
 - в декартовых координатах, 124
 - в полярных координатах, 128
 - Собственный интеграл, 208
 - Спираль Архимеда, 33
 - Среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратичное, 68
 - Среднее значение интегрируемой функции, 273, 343
 - Тело вращения, 447
 - Теорема Барроу, 217
 - Теорема Гульдена, первая, 457
 - Теорема Гульдена, вторая, 451
 - Теорема Лагранжа, следствие, 22
 - Теорема сравнения, 302
 - Теоремы о среднем, 269, 274
 - Точные грани функции, 82
 - Тор, 464
 - Трилистник, 40, 96, 196, 401
 - Улитка Паскаля, 191, 401
 - Условие Липшица, 212
 - Формула Ньютона–Лейбница, 233, 298
 - Формула Тейлора для исследования сходимости интегралов, 342
 - Формулы Бонне, 275
 - Функция Дирихле, 99
 - Функция Римана, 218, 221
 - Цепная линия, 36, 43, 169, 434
 - Циклоида, 25, 71, 89, 399, 463
 - Чётные и нечётные функции, 123
 - Шаровой пояс, 464
 - Экстремумы
 - краевые, 86
 - локальные, 85
 - Эллипс, 29, 107, 153, 399
 - Эллипсоид, 449, 463

Список литературы

- [1] *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. Учеб. для вузов / Под ред. В.А. Садовничего. – 5-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с. – (Классический университетский учебник)
- [2] *Беркович Ф.Д., Федий В.С., Шлыков В.И.* Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями. Учеб. пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2008.
- [3] *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Издательство Лань, 2016. – 492 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
- [4] *Бутузов В.Ф.* Лекции по математическому анализу. Часть I. Учеб. пособие. – М.: Физический факультет МГУ, 2012.
- [5] *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3-х т. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. – Новое изд. – М.: Изд-во Московского университета; МЦНМО, 2017. – 412 с.
- [6] *Гусак А.А.* Справочное пособие по решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения. – Мн.: ТетраСистемс, 1998. – 416 с.
- [7] *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 304 с.: ил.
- [8] *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Учеб. пособие. – СПб., Издательство Лань, 2017. – 624 с.
- [9] *Зорин И.В.* Математические заблуждения о периодических функциях. Пермский государственный национальный исследовательский университет. – 2018. DOI: 10.17072/1993-0550-2018-4-74-77
- [10] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть I. – Изд. 10-е, испр. – М.: МЦНМО, 2019. – 564 с.: ил.
- [11] *Ильин В.А.* Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Кн. 1: учебник для вузов / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 324 с. – (Высшее образование)

-
- [12] *Ильин В.А.* Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Кн. 2: учебник для вузов / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2021. — 315 с. — (Высшее образование).
- [13] *Кочергин А.В., Кострикин И.А.* Учебно-методическое пособие по курсу математического анализа (предел и производная). — М.: ТЕИС, 2011. — 99 с.
- [14] *Кочергин А.В., Кострикин И.А.* Методические материалы по курсу математического анализа (интеграл и функции многих переменных). — М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009. — 64 с.
- [15] *Краснова С.А., Уткин В.А.* Основы математического анализа. Учебное пособие. — М.: РГГУ, 2010. — 551 с.
- [16] *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. В 3 томах. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. — М.: Дрофа, 2003. — 704 с.
- [17] *Левашова Н.Т., Шапкина Н.Е.* Несобственные интегралы. Решение задач. Пособие для студентов 2 курса. Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. — М.: 2016. 69 с.
- [18] *Малугин В.А.* Математический анализ: Учеб. пособие. — М.: Эксмо, 2010. — 592 с.
- [19] *Марченко А.Н., Аносов В.П.* Некоторые неспрямляемые кривые // 26-я Региональная научная студенческая конференция «Интеллектуальный потенциал Сибири» (Новосибирск, 22-24 мая 2018). Сборник научных трудов. В 2-х частях. — Новосибирск: Изд-во НГТУ. Ч. 2. — 672 с. (с. 14–15).
- [20] *Никитин А.А.* Математический анализ. Сборник задач: учеб. пособие для академического бакалавриата. — М.: Издательство Юрайт, 2019. — 353 с. — (Бакалавр. Академический курс).
- [21] *Никитин А.А., Фомичев В.В.* Математический анализ. Углублённый курс. Учебник и практикум. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 460 с.
- [22] *Пантаев М.Ю.* Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа. Том 2. — Ленанд, 2016. — 416 с.
- [23] *Райхмист Р.Б.* Графики функций: задачи и упражнения. — М.: Школа-Пресс, 1997. — 384 с. («Шанс»–«Школа Абитуриента: Научись Сам»)

- [24] Рациональные методы решения задач по математическому анализу: Методические указания и оптимальные алгоритмы решения экзаменационных задач 1-го семестра 1 курса МФТИ/Сост.: Л.И. Коваленко. М., 2006. – 51 с.
- [25] *Садовничий В.А., Подколзин А.С.* Задачи студенческих олимпиад по математике. – М.: Наука, 1978.
- [26] *Садовничая И.В., Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Определённый интеграл. В 2 ч. Часть 1 / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 242 с. – (Бакалавр. Академический курс)
- [27] *Садовничая И.В., Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Определённый интеграл. В 2 ч. Часть 2 / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 199 с. – (Бакалавр. Академический курс)
- [28] *Сизый С.В.* Математические задачи. Студенческие олимпиады математико-механического факультета Уральского госуниверситета. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 128 с.
- [29] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов / Г. М. Фихтенгольц. В 3-х томах. Том 1. – 16-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 608 с.: ил.

Рекомендуемые книги автора по другим разделам математического анализа:

- [30] *Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Тожественные равенства и неравенства и их применение: В помощь практическим занятиям: Учеб. пособие для студентов университетов. – М.: МАКС Пресс, 2016. – 272 с.
- [31] *Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Неопределённый интеграл: Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 187 с. – (Бакалавр. Академический курс)
- [32] *Садовничая И.В., Фоменко Т.Н., Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Дифференцирование функций одной переменной: Учеб. пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 156 с. – (Бакалавр. Академический курс).

Книга содержит 217 примеров, 660 задач для самостоятельной работы (с решениями) и 57 цитат и высказываний известных людей.

Учебное издание

ХОРОШИЛОВА Елена Владимировна

КУРС СЕМИНАРОВ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Самоучитель

Книга 3:

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ:
ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ.
ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

для очной, дистанционной и смешанной форм обучения
студентов университетов

По всем вопросам обращаться на почту:

khorelenay@yandex.ru